

П.Н. Иваньшин

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

КУРС ЛЕКЦИЙ



КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
2013

УДК 519.63
ББК 22.19
И23

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

*методической комиссии Института математики и механики
Протокол № 3 от 18 декабря 2013 г.*

*заседания кафедры теории функций и приближений
Протокол № 5 от 5 декабря 2013 г.*

*Научный редактор –
доктор физ.-мат. наук, проф. **Ф.Г. Авхадиев***

*Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф. КГАСУ **П.Л. Шабалин**
доктор физ.-мат. наук, доц. КФУ **А.М. Бикчентаев***

Иваньшин П.Н.

И23 **Метод конечных элементов: курс лекций:** учебное пособие
/ П.Н. Иваньшин. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 120 с.

Пособие содержит основные понятия метода конечных элементов в применении к уравнениям в частных производных.

Предназначено для студентов III курса Института математики и механики.

УДК 519.63
ББК 22.19

© **Иваньшин П.Н., 2013**
© **Казанский университет, 2013**

Оглавление

1	Одномерная задача	6
1.1	Основные понятия	6
1.2	Сильная или классическая постановка задачи . . .	6
1.3	Слабая или вариационная постановка задачи . . .	7
1.4	Эквивалентность двух постановок задачи	8
1.5	Метод приближений Галеркина	10
1.5.1	Метод Бубнова-Галеркина	10
1.6	Матричные уравнения. Матрица жесткости	11
1.7	Примеры	13
1.7.1	Пример 1. 1 степень свободы	13
1.7.2	Пример 2. 2 степени свободы	15
1.8	Кусочно-линейное пространство конечных элемен- тов	17
1.9	Свойства матрицы K	18
1.10	Анализ	20
1.10.1	Точность в узлах	20
1.10.2	Оценка погрешности приближения	22
1.11	Конструкция с позиции одного элемента	25
1.12	Матрица жесткости и вектор сил для элемента . .	26
1.13	Построение глобальной матрицы жесткости и век- тора сил. Массив LM	28
1.14	Формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора сил	30
1.15	Задачи	32
1.15.1	Уравнение струны на упругом основании .	32
1.15.2	Уравнение $\lambda u + \frac{d^3 u}{dx^3} = f$	33

1.15.3	Теория стержней Бернулли Эйлера и эрмитовы кубики	34
2	Двумерные и пространственные задачи	38
2.1	Введение	38
2.2	Уравнение теплопроводности. Сильная и слабая формулировки	40
2.3	Уравнение теплопроводности. Формулировка Галеркина	43
2.4	Уравнение теплопроводности. Вычисление матрицы жесткости и вектора сил	47
2.5	Задачи	49
2.5.1	Задача 1.	49
2.5.2	Задача 2.	49
2.6	Уравнение теплопроводности. Массивы обработки данных ID , IEN , LM	50
2.6.1	Пример 1	50
2.6.2	Пример 2	52
2.6.3	Задача	53
2.7	Линейная теория упругости. Сильная и слабая постановки задачи	54
2.7.1	Задача	59
2.7.2	Операторная форма записи уравнений	59
2.7.3	Задачи	60
2.8	Линейная теория упругости. Постановка задачи Галеркина	62
2.8.1	Задача	64
2.8.2	Операторная запись задачи Галеркина	64
2.9	Линейная теория упругости. Матрица жесткости и вектор сил	67
2.9.1	Задача	68
2.10	Линейная теория упругости. Массивы ID , IEN , LM	69

2.10.1	Примеры	69
2.10.2	Задача	74
2.11	Осесимметричные формулировки методов	75
2.11.1	Уравнение теплопроводности	75
2.11.2	Уравнение теории упругости	75
2.11.3	Задачи	77
3	Изопараметрические элементы	84
3.1	Предварительные сведения	84
3.1.1	Полнота	85
3.2	Билинейный четырехугольный элемент	87
3.3	Изопараметрические элементы	93
3.3.1	Условие C1	94
3.3.2	Условие C3	95
3.4	Линейный треугольный элемент. Пример “вырожде- ния”	96
3.5	Трилинейный шестигранный (гексаэдральный) элемент	98
3.6	Элементы высших порядков. Полиномы Лагранжа	102
3.6.1	Полиномы Лагранжа	102
3.7	Элементы с переменным числом узлов	107
4	Примеры программ	115
4.1	Пример 1. Уравнение Лапласа	115
4.2	Волновое уравнение	116

Глава 1

Одномерная задача

1.1 Основные понятия

Основные компоненты метода конечных элементов для решения краевых задач

1. Вариационная или слабая постановка задачи.
2. Приближенное решение вариационных уравнений с использованием “конечноэлементных функций”.

Для прояснения подхода приведем пример.

Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно функции u :

$$u_{,xx} + f = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $u_{,xx} = \frac{d^2 u}{dx^2}$. Мы предполагаем, что f — гладкая функция

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) описывает трансверсальные смещения точек струны или упругого стержня под напряжением.

1.2 Сильная или классическая постановка задачи

Краевая задача для уравнения (1.1) подразумевает постановку краевых условий на функцию u . Предположим, что u удовлетворяет следующим условиям:

$$u(1) = q; -u_{,x}(0) = k. \quad (1.3)$$

Здесь q и k — данные константы. Уравнения (1.3) определяют так называемые двухточечные краевые задачи.

Сильная или классическая постановка (S) задачи:

$$(S) \begin{cases} \text{по данным } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, q, k \text{ найти такую функцию} \\ u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ что} \\ u_{,xx} + f = 0 \text{ на } [0, 1] \\ u(1) = q; \\ -u_{,x}(0) = k. \end{cases}$$

Естественно, легко найти точное решение (S)

$$u(x) = q + (1 - x)k + \int_x^1 \int_0^y f(z) dz dy. \quad (1.4)$$

Этот пример, однако, нужен нам для построения основных схем приближенного решения.

1.3 Слабая или вариационная постановка задачи

Для того, чтобы поставить задачу в слабой или вариационной форме, необходимо ввести два класса функций. Первый класс функций состоит из так называемых пробных решений. Будем предполагать, что функции из этого класса удовлетворяют граничному условию $u(1) = q$. Второе краевое условие мы при построении данного класса функций не используем. Кроме первого условия, мы полагаем, что пробные решения также удовлетворяют неравенству

$$\int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty. \quad (1.5)$$

То есть $u \in H^1([0, 1])$. Обозначим множество пробных решений через

$$\mathcal{S} = \{u \in H^1([0, 1]) | u(1) = q\}. \quad (1.6)$$

Второе множество функций — множество весовых функций или вариаций. Полагаем, что такие функции удовлетворяют однородному граничному условию. Обозначим множество весовых функций или вариаций через

$$\mathcal{V} = \{w \in H^1([0, 1]) | w(1) = 0\}. \quad (1.7)$$

Слабая или вариационная (W) постановка задачи:

$$(W) \begin{cases} \text{по данным } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, q, k \text{ найти такую} \\ u \in \mathcal{S}, \text{ что для всех } w \in \mathcal{V} \\ \int_0^1 u_{,x} w_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)k. \end{cases} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) называется вариационным уравнением или уравнением виртуальной работы, w называется функцией виртуальных смещений.

1.4 Эквивалентность двух постановок задачи

Теорема 1. *Функция u — решение (S) тогда и только тогда, когда u — решение (W).*

Доказательство. Пусть u — решение (S). Тогда для любой $w \in \mathcal{V}$

$$\int_0^1 w(u_{,xx} + f) = 0 \quad (1.9)$$

Интегрируем (1.9) по частям и получим

$$\int_0^1 u_{,x} w_{,x} dx - \int_0^1 w f dx + w u_{,x} \Big|_0^1. \quad (1.10)$$

Следовательно, с учетом того, что $w(1) = 0$, а $-u_{,x}(0) = k$ из (1.10) следует

$$\int_0^1 u_{,x} w_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)k. \quad (1.11)$$

Кроме того, поскольку u — решение (S), $u(1) = q$, тогда $u \in \mathcal{S}$. Поскольку $w \in \mathcal{V}$ произвольна, u — решение (W).

Пусть u — решение (W). Тогда $u \in \mathcal{S}$ и $u(1) = q$, кроме того для любой $w \in \mathcal{V}$

$$\int_0^1 u_{,x} w_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)k.$$

Интегрируя по частям получим

$$\int_0^1 w(u_{,xx} + f) dx + w(0)(u_{,x}(0) + k) = 0. \quad (1.12)$$

Докажем теперь, что

1. $u_{,xx} + f = 0$ на $[0, 1]$.
2. $u_{,x}(0) + k = 0$.

Положим

$$w = \phi(x)(u_{,xx} + f), \quad (1.13)$$

где $\phi(0) = \phi(1) = 0$, $\phi|_{(0,1)} > 0$. То есть $w \in \mathcal{V}$. Подставим (1.13) в (1.12) и получим

$$\int_0^1 \phi w(u_{,xx} + f)^2 dx = 0. \quad (1.14)$$

Так как $\phi|_{(0,1)} > 0$ имеем $u_{,xx} + f = 0$ на $[0, 1]$.

Подставим последнее тождество в (1.12) и получим

$$w(0)(u_{,x}(0) + k) = 0. \quad (1.15)$$

Поскольку $w(0)$ произвольно, $(u_{,x}(0) + k) = 0$.

□

Метод конечных элементов опирается на решение задач в слабой формулировке. Основная идея — приближение функциональных пространств \mathcal{V} , \mathcal{S} конечномерными наборами функций.

Введем следующие обозначения:

$$a(u, w) = \int_0^1 u_{,x} w_{,x} dx. \quad (1.16)$$

$$(u, w) = \int_0^1 u w dx. \quad (1.17)$$

Тогда вариационное уравнение можно переписать в виде

$$a(w, u) = (w, f) + w(0)k. \quad (1.18)$$

1.5 Метод приближений Галеркина

Построим конечномерные аппроксимации пространств \mathcal{V} , \mathcal{S} . Обозначим эти аппроксимации через \mathcal{V}^h , \mathcal{S}^h , соответственно. Здесь h — характеристика конечного элемента (диаметр). Считаем, что $\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$. То есть,

$$u^h(1) = q. \quad (1.19)$$

$$w^h(1) = 0. \quad (1.20)$$

1.5.1 Метод Бубнова-Галеркина

Пусть пространство \mathcal{V}^h дано. Для любого $v^h \in \mathcal{V}^h$ рассмотрим $u^h \in \mathcal{S}^h$

$$u^h = v^h + q^h. \quad (1.21)$$

Здесь q^h — некоторая функция, удовлетворяющая граничному условию

$$q^h(1) = q. \quad (1.22)$$

Заметим, что u^h по построению также удовлетворяет условию (1.22). Уравнение (1.21) определяет пространство \mathcal{S}^h . То есть \mathcal{S}^h состоит из функций вида (1.21).

Запишем теперь уравнение (1.18) в терминах $w^h \in \mathcal{V}^h$, $u^h \in \mathcal{S}^h$

$$a(w^h, u^h) = (w^h, f) + w^h(0)k. \quad (1.23)$$

Подставим (1.21) в (1.23) и получим

$$a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)k - a(w^h, q^h). \quad (1.24)$$

Постановка задачи Бубнова-Галеркина (G):

$$(G) \begin{cases} \text{по данным } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, q, k \text{ найти такую} \\ u^h = v^h + q^h, v^h \in \mathcal{V}^h, \\ \text{что для всех } w^h \in \mathcal{V}^h \\ a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)k - a(w^h, q^h). \end{cases}$$

Уравнение (1.23) называется уравнением Галеркина.

1.6 Матричные уравнения. Матрица жесткости

Метод Галеркина приводит к спаренной системе линейных уравнений. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим более подробно конструкцию \mathcal{V}^h . Пусть \mathcal{V}^h состоит из линейных комбинаций данного семейства функций $N_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $A = 1, \dots, n$. То есть для $w^h \in \mathcal{V}^h$

$$w^h = \sum_{A=1}^n c_A N_A. \quad (1.25)$$

Функции N_A называются базисными или интерполяционными функциями. Мы требуем, что

$$N_A(1) = 0, A = 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

Для того, чтобы определить \mathcal{S}^h необходимо задать q^h . Рассмотрим дополнительную базисную функцию $N_{n+1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условию

$$N_{n+1}(1) = 1. \quad (1.27)$$

Положим

$$q^h = q N_{n+1}. \quad (1.28)$$

Тогда для $u^h \in \mathcal{S}^h$ получим представление

$$u^h = v^h + q^h = \sum_{A=1}^n d_A N_A + q N_{n+1}. \quad (1.29)$$

Подставим (1.25), (1.29) в уравнение Галеркина и получим

$$\begin{aligned} & a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, \sum_{s=1}^n d_s N_s\right) = \\ & = \left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, f\right) + \sum_{A=1}^n c_A N_A(0)k - a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, q N_{n+1}\right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Иначе в силу билинейности приведенных операций

$$\sum_{A=1}^n c_A G_A = 0, \quad (1.31)$$

Здесь

$$G_A = \sum_{s=1}^n a(N_A, N_s) d_s - (N_A, f) - N_A(0)k + a(N_A, N_{n+1})q, \quad (1.32)$$

Поскольку набор c_A произволен, $G_A = 0$, $A = 1, \dots, n$. То есть, из (1.32) получим

$$\sum_{s=1}^n a(N_A, N_s) d_s = (N_A, f) + N_A(0)k - a(N_A, N_{n+1})q, \quad A = 1, \dots, n \quad (1.33)$$

Последнее семейство тождеств — система n линейных уравнений на n неизвестных d_s , $s = 1, \dots, n$.

Положим

$$K_{AB} = a(N_A, N_B); \quad (1.34)$$

$$F_B = (N_B, f) + N_B(0)k - a(N_B, N_{n+1})q. \quad (1.35)$$

Тогда система (1.33) принимает вид

$$K \bar{d} = \bar{F}. \quad (1.36)$$

Матрицу K называют матрицей жесткости, вектор \bar{F} — вектором сил, вектор \bar{d} — вектором смещений.

Матричная постановка задачи Бубнова-Галеркина (М):

$$(M) \begin{cases} \text{По данным } K, \bar{F} \text{ найти такой вектор } \bar{d}, \text{ что} \\ K\bar{d} = \bar{F}. \end{cases}$$

С помощью вектора \bar{d} можно однозначно восстановить функцию

$$u^h = \sum_{A=1}^n d_A N_A + q N_{n+1}. \quad (1.37)$$

1.7 Примеры

1.7.1 Пример 1. 1 степень свободы

Положим $n = 1$. Тогда $w^h = c_1 N_1$, $u^h = v^h + q^h = d_1 N_1 + q N_2$. Единственный неизвестный коэффициент — d_1 . Базисные функции удовлетворяют соотношениям $N_1(1) = 0$, $N_2(1) = 1$. Положим $N_1(x) = 1 - x$, $N_2(x) = x$. При этом $K = K_{11}$, $\bar{F} = F_1$, $\bar{d} = d_1$. Кроме того,

$$K_{11} = a(N_1, N_1) = \int_0^1 N_{1,x}^2 dx = 1; \quad (1.38)$$

$$F_1 = (N_1, f) + N_1(0)k - a(N_1, N_2)q = \int_0^1 (1-x)f(x)dx + k + q; \quad (1.39)$$

$$d_1 = \bar{d} = K^{-1}\bar{F} = 1 \cdot \bar{F} = F_1. \quad (1.40)$$

Следовательно,

$$u^h(x) = \left(\int_0^1 (1-y)f(y)dy + k + q \right) (1-x) + qx. \quad (1.41)$$

1. Пусть $f = 0$. Тогда

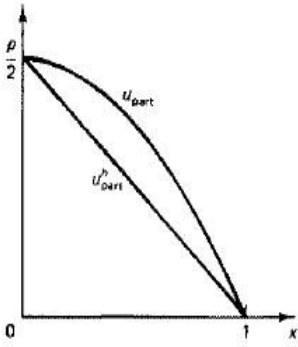
$$u^h(x) = u(x) = k(1 - x) + q. \quad (1.42)$$

То есть приближенное решение совпадает с точным.

2. Пусть $f = p \neq 0$. Тогда получаем частные решения

$$u_p(x) = \frac{p(1 - x^2)}{2}. \quad (1.43)$$

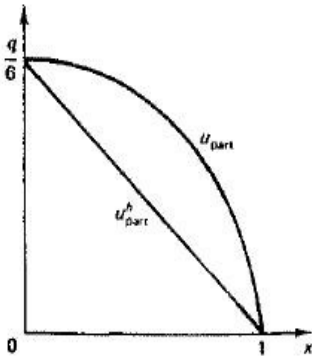
$$u_p^h(x) = \frac{p(1 - x)}{2}. \quad (1.44)$$



3. Пусть $f = \kappa x$. Тогда получаем частные решения

$$u_p(x) = \frac{\kappa(1 - x^3)}{2}. \quad (1.45)$$

$$u_p^h(x) = \frac{\kappa(1 - x)}{2}. \quad (1.46)$$



1.7.2 Пример 2. 2 степени свободы

Пусть $n = 2$. Тогда $w^h = c_1 N_1 + c_2 N_2$, $u^h = v^h + q^h = d_1 N_1 + d_2 N_2 + q N_3$. Определим N_1, N_2, N_3 по формулам:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.47)$$

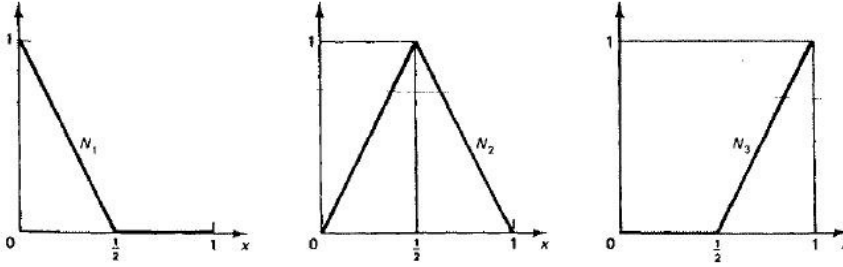
$$N_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1 - x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.48)$$

$$N_3(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.49)$$

При этом

$$K = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} F_A &= (N_A, f) + N_A(0)k - a(N_A, N_3)q = \\ &= \int_0^1 N_A f dx + N_A(0)k - q \int_{1/2}^1 N_{A,x} N_{3,x} dx. \end{aligned} \quad (1.51)$$



В данном примере

$$F_1 = \int_0^{1/2} (1 - 2x) f(x) dx + k. \quad (1.52)$$

$$F_2 = 2 \int_0^{1/2} x f(x) dx + 2 \int_{1/2}^1 (1 - x) f(x) dx + 2q. \quad (1.53)$$

1. Пусть $f = 0$. Тогда

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} k \\ 2q \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \overline{d} &= K^{-1}\overline{F} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + k \\ q + k/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

При этом получим решение

$$u^h = (q + k)N_1 + (q + k/2)N_2 + qN_3 = q + k(1 - x). \quad (1.56)$$

Полученное решение опять совпадает с точным.

2. Пусть $f = p \neq 0$. Тогда

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} p/4 + k \\ p/2 + 2q \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

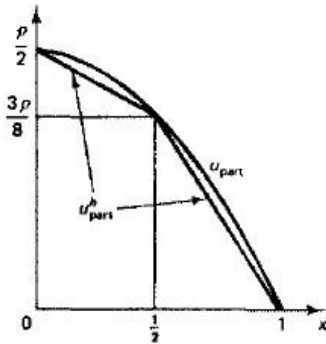
$$\overline{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p/4 + k \\ p/2 + 2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/2 + q + k \\ 3p/8 + q + k/2 \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

Решение принимает вид

$$u^h(x) = q + k(1 - x) + u_p^h(x), \quad (1.59)$$

где

$$u_p^h(x) = \frac{p}{2}N_1 + \frac{3p}{8}N_2. \quad (1.60)$$



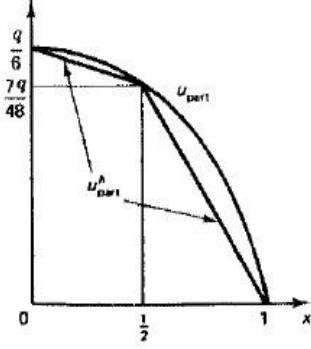
3. Пусть $f = \kappa x$. Тогда

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} \kappa/24 + k \\ \kappa/4 + 2q \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \kappa/6 + q + k \\ 7\kappa/48 + q + k/2 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

u^h можно опять представить в виде (1.59), где

$$u_p^h(x) = \frac{\kappa}{6}N_1 + \frac{7\kappa}{48}N_2. \quad (1.63)$$



1.8 Кусочно-линейное пространство конечных элементов

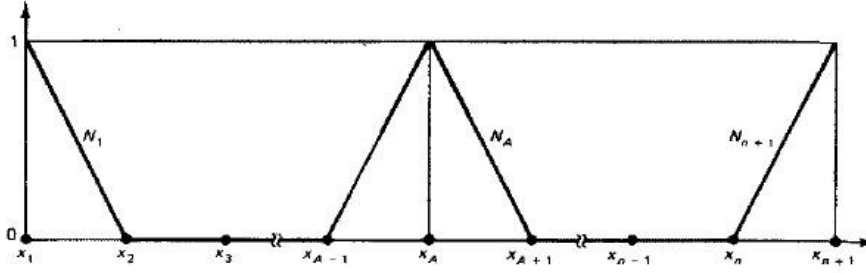
Построим n -мерное пространство \mathcal{V}^h . Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n непересекающихся интервалов $[x_A, x_{A+1}]$, $A = 1, \dots, n$. Точки x_A называются узловыми точками или узлами. Интервалы $[x_A, x_{A+1}]$ называются конечными элементами или просто элементами. Пусть $h_A = x_{A+1} - x_A$. Тогда параметр разбиения $h = \max_{A=1, \dots, n-1} (x_{A+1} - x_A)$. Базисные функции N_A определим по формуле

$$N_A = \begin{cases} \frac{x - x_{A-1}}{h_{A-1}}, & x \in [x_{A-1}, x_A] \\ \frac{x_{A+1} - x}{h_A}, & x \in [x_A, x_{A+1}] \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus ([x_A, x_{A+1}] \cup [x_{A-1}, x_A]). \end{cases} \quad (1.64)$$

При этом для крайних узлов имеем

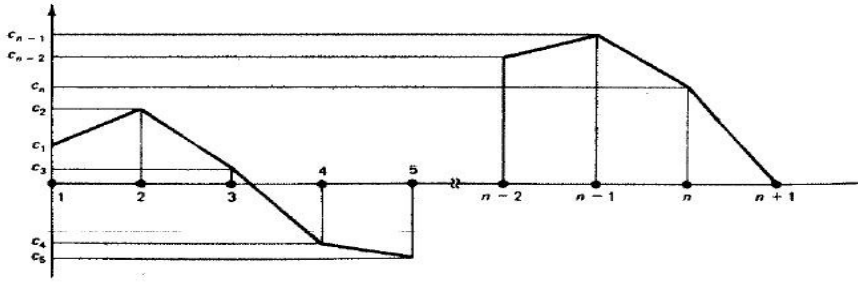
$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{h_1}, \quad x \in [x_1, x_2], \quad (1.65)$$

$$N_{n+1}(x) = \frac{x - x_n}{h_n}, \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad (1.66)$$



Типичный представитель $w^h \in \mathcal{V}^h$ имеет вид $\sum_{A=1}^n c_A N_A$. Ре-

шение тогда есть $u^h = \sum_{A=1}^n c_A N_A + q N_{n+1}$.

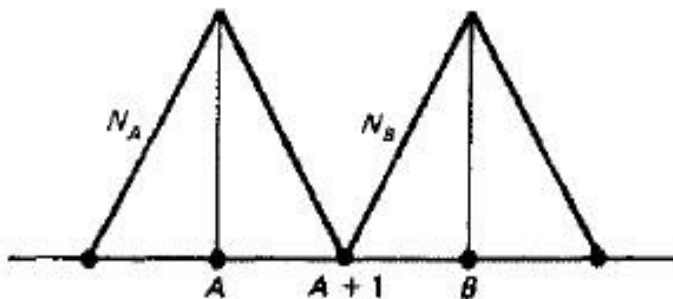


При этом $w_{k,x}^h$ кусочно-постоянна или ступенчатая.

1.9 Свойства матрицы K

Заметим сначала, что вне некоторой окрестности x_A функции N_A , $A = 1, \dots, n$ обращаются в 0. Следовательно, достаточно большое количество элементов матрицы K также нулевые. Пусть $B > A + 1$. Тогда

$$K_{AB} = \int_0^1 N_{A,x} N_{B,x} dx = 0 \quad (1.67)$$



Матрица K при этом имеет три-диагональный вид.

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & \dots & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{32} & \dots & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & K_{nn-1} & K_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Теорема 2. Матрица K , определенная по формуле (1.67) положительно определена.

Доказательство. Пусть $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$. Рассмотрим $w^h =$

$\sum_{A=1}^n c_A N_A \in \mathcal{V}^h$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{c}^T K \bar{c} &= \sum_{A,B=1}^n c_A K_{AB} c_B = \\ &= \sum_{A,B=1}^n c_A a(N_A, N_B) c_B = \\ &= a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, \sum_{B=1}^n c_B N_B\right) = \\ &= a(w^h, w^h) = \\ &= \int_0^1 (w^h_{,x})^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Пусть $\bar{c}^T K \bar{c} = 0$. Тогда $\int_0^1 (w^h_{,x})^2 dx = 0$. Следовательно, $w^h = \text{const}$. Так как $w^h \in \mathcal{V}^h$, $w^h(1) = 0$. Тогда $w^h|_{[0,1]} = 0$, что возможно только при $c_A = 0$, $A = 1, \dots, n$. \square

1.10 Анализ

1.10.1 Точность в узлах

Докажем сначала, что решение u^h , полученное методом Галеркина, совпадает с точным решением u в узлах. Для этого нам потребуется понятие функции Грина.

Пусть $\delta_y(x)$ — дельта-функция Дирака определенная по формуле

$$(w, \delta_y) = \int_0^1 w(x) \delta(x - y) dx = w(y) \quad (1.69)$$

Задача о поиске функции Грина, соответствующей уравнению (S) может быть поставлена следующим образом:

Найти такую функцию g , что

$$g_{,xx} + \delta_y = 0 \text{ на } \Omega, \quad (1.70)$$

$$g(1) = 0, \quad (1.71)$$

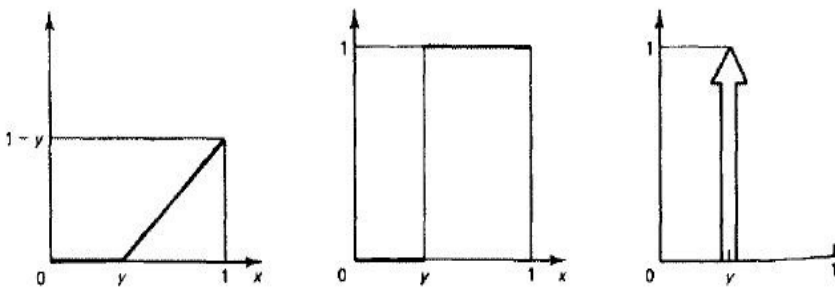
$$g_{,x}(0) = 0. \quad (1.72)$$

Решение этой задачи можно получить, используя так называемые обобщенные функции. Например, интегралом от $\delta_y(x)$ является так называемая функция Хевисайда:

$$H_y(x) = H(x - y) = \begin{cases} 0 & x < y \\ 1 & x \geq y. \end{cases} \quad (1.73)$$

Интеграл от H_y — скобка Маколэя (усеченная разность):

$$\langle x - y \rangle = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y. \end{cases} \quad (1.74)$$



Тогда при первом интегрировании (1.70) получим

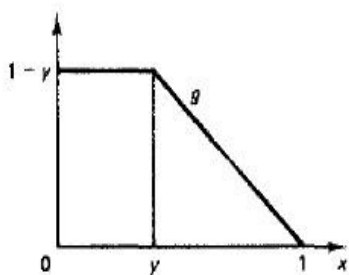
$$g_{,x} + H_y = c_1. \quad (1.75)$$

Второе интегрирование даст

$$g + \langle x - y \rangle = c_1 x + c_2. \quad (1.76)$$

Найдем c_1, c_2 из граничных условий. Следовательно,

$$g(x) = (1 - y) - \langle x - y \rangle. \quad (1.77)$$



Найдем теперь вариационное уравнение, соответствующее задаче о поиске функции Грина. Подставим в (W) вместо u g , $f = \delta_y$, вместо q , k нули. Получим

$$a(w, g) = (w, \delta_y) = w(y). \quad (1.78)$$

Теорема 3. $u^h(x_A) = u(x_A)$, $A = 1, \dots, n$.

Для доказательства утверждения потребуются две леммы

Лемма 1. Для любой функции $w^h \in \mathcal{V}^h$ $a(u - u^h, w^h) = 0$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$, можно заменить в вариационном уравнении w на w^h .

$$a(w^h, u) = (w^h, f) + kw^h(0). \quad (1.79)$$

Вычтем из этого уравнения уравнение Галеркина

$$a(w^h, u^h) = (w^h, f) + kw^h(0). \quad (1.80)$$

и получим требуемое. \square

Лемма 2. $u(y) - u^h(y) = a(u - u^h, g)$, где g — функция Грина.

Доказательство. По определению δ_y

$$u(y) - u^h(y) = (u - u^h, \delta_y) =$$

по формуле (1.78)

$$= a(u - u^h, g).$$

□

Докажем теперь теорему

Доказательство. Пусть $y = x_A$. Тогда по Лемме 2

$$u(x_A) - u^h(x_A) = (u - u^h, g) =$$

по Лемме 1

$$= 0.$$

□

1.10.2 Оценка погрешности приближения

Напомним сначала некоторые основные формулы. Пусть $f \in C^k([0, 1])$. Пусть еще $y, z \in [0, 1]$. Тогда существует такая точка $c \in [y, z]$, чтобы

$$\begin{aligned} f(z) = f(y) + (z - y)f_{,x}(y) + \frac{1}{2}(z - y)^2 f_{,xx}(y) + \\ + \frac{1}{6}(z - y)^3 f_{,xxx}(y) + \dots + \\ + \frac{1}{k!}(z - y)^k f_{, \underbrace{xx \dots x}_k}(c). \end{aligned} \quad (1.81)$$

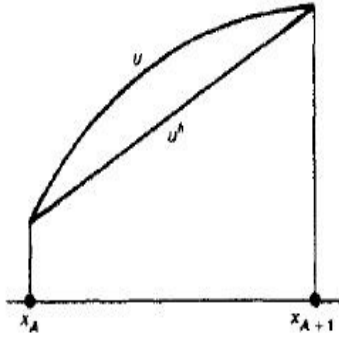
Теорема о среднем — частный случай (1.81) при $k = 1$.

$$f(z) = f(y) + (z - y)f_{,x}(c). \quad (1.82)$$

Кроме того, для функции u^h верно

$$u_{,x}^h(x) = \frac{u^h(x_{A+1}) - u^h(x_A)}{h_A}. \quad (1.83)$$

Теорема 4. Пусть $u \in C^1([0, 1])$, тогда существует точка на $[0, 1]$ в которой формула (1.81) точна.



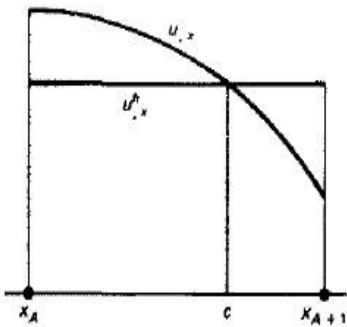
Доказательство. По теореме о среднем существует точка $c \in [x_A, x_{A+1}]$ в которой

$$u_{,x}(c) = \frac{u(x_{A+1}) - u(x_A)}{h_A}. \quad (1.84)$$

Поскольку $u^h(x_{A+1}) = u(x_{A+1})$ и $u^h(x_A) = u(x_A)$ можно переписать (1.84) следующим образом

$$u_{,x}(c) = \frac{u^h(x_{A+1}) - u^h(x_A)}{h_A}. \quad (1.85)$$

Теперь сравнение (1.85) и (1.83) дает требуемое. \square



Рассмотрим теперь отклонение производной

$$e_{,x}(\alpha) = u^h_{,x}(\alpha) - u_{,x}(\alpha) = \frac{u^h(x_{A+1}) - u^h(x_A)}{h_A} - u_{,x}(\alpha). \quad (1.86)$$

Лемма 3. Пусть $u \in C^3([0, 1])$. Тогда

$$e_{,x}(\alpha) = \left(\frac{x_{A+1} - x_A}{2} - \alpha\right)u_{,xx}(\alpha) + \frac{1}{k!h_A}((x_{A+1} - \alpha)^3u_{,xxx}(c_1) - (x_A - \alpha)^3u_{,xxx}(c_2)), \quad (1.87)$$

где $c_1, c_2 \in [x_A, x_{A+1}]$.

Доказательство. Рассмотрим разложения $u(x_A)$ и $u(x_{A+1})$ в окрестности $\alpha \in [x_A, x_{A+1}]$.

$$u(x_{A+1}) = u(\alpha) + (x_{A+1} - \alpha)u_{,x}(\alpha) + \frac{1}{2}(x_{A+1} - \alpha)^2u_{,xx}(\alpha) + \frac{1}{3!}(x_{A+1} - \alpha)^3u_{,xxx}(c_1), \quad c_1 \in [\alpha, x_{A+1}]$$

$$u(x_A) = u(\alpha) + (x_A - \alpha)u_{,x}(\alpha) + \frac{1}{2}(x_A - \alpha)^2u_{,xx}(\alpha) + \frac{1}{3!}(x_A - \alpha)^3u_{,xxx}(c_2), \quad c_2 \in [x_A, \alpha]$$

Вычтем одну формулу из другой и поделим на h_A .

$$\frac{u^h(x_{A+1}) - u^h(x_A)}{h_A} = u_{,x}(\alpha) + \left(\frac{x_{A+1} - x_A}{2} - \alpha\right)u_{,xx}(\alpha) + \frac{1}{3!}(x_{A+1} - \alpha)^3(u_{,xxx}(c_1) - u_{,xxx}(c_2)).$$

□

Следствие 1. Пусть $x_{A+\frac{1}{2}} = \frac{x_{A+1} + x_A}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} e_{,x}(x_{A+\frac{1}{2}}) &= \frac{h_A^2}{24}u_{,xxx}(c) = \\ &= O(h_A^2), \quad c \in [x_A, x_{A+1}] \end{aligned}$$

Доказательство. По формуле (1.87) имеем

$$e_{,x}(x_{A+\frac{1}{2}}) = \frac{h_A^2}{48}(u_{,xxx}(c_1) + u_{,xxx}(c_2)).$$

В силу непрерывности $u_{,xxx}$ существует точка $c \in [c_1, c_2]$, в которой

$$u_{,xxx}(c) = \frac{1}{2}(u_{,xxx}(c_1) + u_{,xxx}(c_2)).$$

Последнее доказывает утверждение. \square

1.11 Конструкция с позиции одного элемента

Глобальное описание конечного элемента:

1. Область определения $[x_A, x_{A+1}]$.
2. Узлы $\{x_A, x_{A+1}\}$.
3. Степени свободы $\{d_A, d_{A+1}\}$.
4. Базисные функции $\{N_A, N_{A+1}\}$.
5. Интерполирующая функция

$$u^h = d_A N_A(x) + d_{A+1} N_{A+1}(x), \quad x \in [x_A, x_{A+1}].$$

Локальное описание конечного элемента:

1. Область определения $[\xi_1, \xi_2]$.
2. Узлы $\{\xi_1, \xi_2\}$.
3. Степени свободы $\{d_A, d_{A+1}\}$.
4. Базисные функции $\{N_1, N_2\}$.
5. Интерполирующая функция

$$u^h = d_A N_1(x) + d_{A+1} N_2(x), \quad x \in [\xi_1, \xi_2].$$

Области определения глобального и локального описания связаны при помощи аффинного преобразования $\xi : [x_A, x_{A+1}] \rightarrow [\xi_1, \xi_2]$, где $\xi(x_A) = \xi_1$, $\xi(x_{A+1}) = \xi_2$. Обычно полагают, что $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$. Пусть $\xi(x) = c_1 + c_2 x$. Тогда

$$\xi(x) = \frac{2x - x_A - x_{A+1}}{h_A}. \quad (1.88)$$

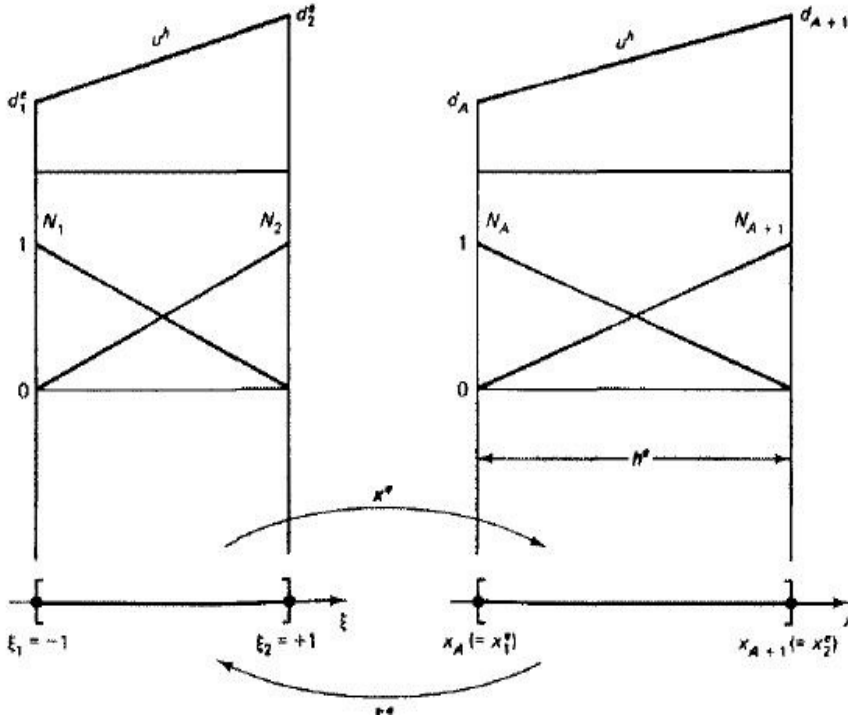
$$x(\xi) = \frac{h_A \xi + x_A + x_{A+1}}{2}. \quad (1.89)$$

В координате ξ базисные функции принимают вид

$$N_a(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi), \quad a = 1, 2. \quad (1.90)$$

Кроме того, внутри элемента можно выразить (1.89) через N_a

$$x^e(\xi) = \sum_1^2 N_a(\xi) x_a^e. \quad (1.91)$$



Заметим еще, что имеют место следующие тождества:

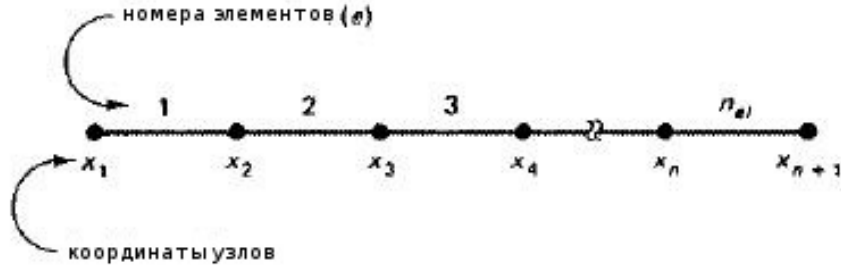
$$N_{a,\xi}(\xi) = \frac{\xi_a}{2} = \frac{(-1)^a}{2}, \quad (1.92)$$

$$x_{,\xi}^e = \frac{h^e}{2} = \frac{x_2^e - x_1^e}{2}, \quad (1.93)$$

$$\xi_{,x}^e = (x_{,\xi}^e)^{-1} = \frac{2}{h^e}. \quad (1.94)$$

1.12 Матрица жесткости и вектор сил для элемента

Предположим, что наша модель состоит из n_{el} конечных элементов. Очевидно, что в данном случае $n_{el} = n$.



Напомним, что координаты матрицы K и вектора сил \bar{F} вычисляются по формулам

$$K_{AB} = a(N_A, N_B) = \int_0^1 N_{A,x} N_{B,x} dx. \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} F_A &= (N_A, f) + \delta_{A_1} k - a(N_A, N_{n+1})q = \\ &= \int_0^1 N_A f dx + \delta_{A_1} k - q \int_0^1 N_{A,x} N_{n+1,x} dx, \end{aligned} \quad (1.96)$$

где $N_A(x_1) = \delta_{A_1}$.

Интегралы по $[0, 1]$ представим в виде суммы интегралов по элементам. Тогда получим

$$K = \sum_{e=1}^{n_{el}} K^e, \quad K^e = [K_{AB}^e]. \quad (1.97)$$

$$\bar{F} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \bar{F}^e, \quad \bar{F}^e = [F_A^e]. \quad (1.98)$$

Здесь

$$K_{AB}^e = a(N_A, N_B)^e = \int_{\Omega^e} N_{A,x} N_{B,x} dx. \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} F_A^e &= (N_A, f)^e + \delta_{e_1} \delta_{A_1} k - a(N_A, N_{n+1})^e q = \\ &= \int_{\Omega^e} N_A f dx + \delta_{e_1} \delta_{A_1} k - q \int_{\Omega^e} N_{A,x} N_{n+1,x} dx, \end{aligned} \quad (1.100)$$

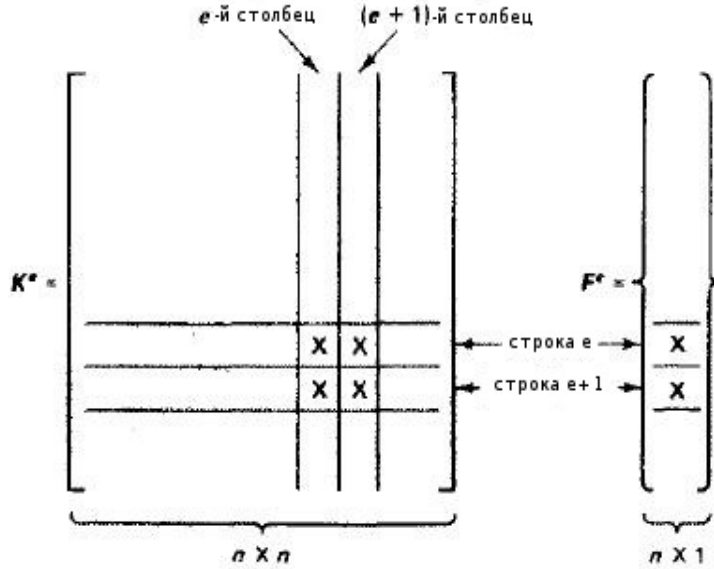
а $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ — область определения элемента с номером e .

По определению N_A имеем

$$K_{AB}^e = 0, \text{ если } A \neq e \text{ или } e + 1, \text{ или } B \neq e \text{ или } e + 1. \quad (1.101)$$

и

$$F_A^e = 0, \text{ если } A \neq e \text{ или } e + 1. \quad (1.102)$$



Поскольку получим много нулевых координат тензоров, представляется разумным ввести матрицы жесткости и вектор сил для элемента с номером e в следующем виде:

$$k^e = \underbrace{[k_{ab}^e]}_{2 \times 2}, \quad \bar{f} = \underbrace{[f_a^e]}_{2 \times 1}. \quad (1.103)$$

$$k_{ab}^e = a(N_a, N_b)^e = \int_{\Omega^e} N_{a,x} N_{b,x} dx. \quad (1.104)$$

$$f_a^e = \int_{\Omega^e} N_a f dx + \begin{cases} \delta_{a_1} k & e = 1 \\ 0 & e = 2, 3, \dots, n_{el} - 1 \\ -k_{02}^e q & e = n_{el}. \end{cases} \quad (1.105)$$

1.13 Построение глобальной матрицы жесткости и вектора сил. Массив LM

При программировании метода конечных элементов информация о том, на каком месте в матрице K содержится матрица k^e

или на каком месте стоят подвекторы \bar{f}^e в векторе \bar{F} находится в специально упорядоченном массиве. Этот массив называется матрицей локаций (LM).

Построим данный массив. Размерности этой матрицы — n_{en} (число узлов элемента) и n_{el} (число элементов). В рассматриваемом случае $n_{en} = 2$. По данному номеру степени свободы a и номеру элемента e находим глобальный номер уравнения.

$$A = LM(a, e) = \begin{cases} e, & a = 1 \\ e + 1, & a = 2. \end{cases} \quad (1.106)$$

		номера элементов $1 \leq e \leq n_{el}$							
		1	2	3	...	e	...	$n_{el}-1$	n_{el}
Локальный номер узла	1	1	2	3	...	e	...	$n-1$	n
	2	2	3	4	...	$e+1$...	n	0
$(n_{en} = 2)$		$n_{en} \times n_{el}$							

Пусть, например, мы хотим добавить информацию об элементе с номером $e < n_{el}$ к уже частично собранным тензорам K и \bar{F} . Получим

$$K_{ee} \leftarrow K_{ee} + k_{11}^e. \quad (1.107)$$

$$K_{e,e+1} \leftarrow K_{e,e+1} + k_{12}^e. \quad (1.108)$$

$$K_{e+1,e} \leftarrow K_{e+1,e} + k_{21}^e. \quad (1.109)$$

$$K_{e+1,e+1} \leftarrow K_{e+1,e+1} + k_{22}^e. \quad (1.110)$$

$$F_e \leftarrow F_e + f_1^e. \quad (1.111)$$

$$F_{e+1} \leftarrow F_{e+1} + f_2^e. \quad (1.112)$$

Здесь операция \leftarrow означает замену того, что стоит слева от стрелки на то, что стоит справа от нее. При этом, для элемента с номером n_{el} получим только

$$K_{n,n} \leftarrow K_{n,n} + k_{11}^{n_{el}}. \quad (1.113)$$

$$F_n \leftarrow F_n + f_1^{n_{el}}. \quad (1.114)$$



1.14 Формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора сил

Поскольку при работе с одним выделенным элементом удобно пользоваться локальной координатой ξ вместо глобальной координаты x , формулы для вычисления нужных тензоров принимают следующий вид;

$$\begin{aligned}
 k_{ab}^e &= \int_{\Omega^e} N_{a,x} N_{b,x} dx = (\text{по определению}) \\
 &= \int_{-1}^1 N_{a,\xi}(x(\xi)) N_{b,\xi}(x(\xi)) (x_{,\xi}(\xi))^{-1} d\xi =
 \end{aligned}$$

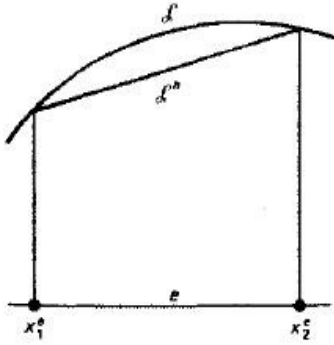
$$= \frac{(-1)^{a+b}}{h^e}.$$

То есть

$$k^e = \frac{1}{h^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.115)$$

Естественно необходимо предъявить подобное выражение для \bar{f}^e . Заметим, что это невозможно сделать без знания дополнительной информации о функции f . Заменим f на ее приближение сплайном.

$$f^h = \sum_{a=1}^2 f(x(\xi_a)) N_a. \quad (1.116)$$



Получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} N_a(x) f^h(x) dx &= \int_{-1}^1 N_a(x(\xi)) f^h(x(\xi)) x_{,\xi}(\xi) d\xi = \\ &= \frac{h^e}{2} \sum_{b=1}^2 \left(\int_{-1}^1 N_a(\xi) N_b(\xi) d\xi \right) f(x(\xi_b)) \end{aligned} \quad (1.117)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{f}^e &= \frac{h^e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x(\xi_1)) \\ f(x(\xi_2)) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{h^e}{6} \begin{pmatrix} 2f(x(\xi_1)) + f(x(\xi_2)) \\ f(x(\xi_1)) + 2f(x(\xi_2)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.118)$$

1.15 Задачи

1.15.1 Уравнение струны на упругом основании

Само уравнение есть

$$u_{,xx} - \lambda u + f = 0 \text{ на } \Omega = [0, 1].$$

Здесь $\lambda > 0$ характеризует жесткость основания.

Можно доказать, что эквивалентная слабая формулировка имеет вид

$$\int_{\Omega} (w_{,x} u_{,x} + \lambda w u) dx = \int_{\Omega} w f dx + w(0)k,$$

где $u \in \mathcal{S}$, $w \in \mathcal{V}$. Последнее тождество можно переписать в виде

$$a(w, u) + \lambda(w, u) = (w, f) + w(0)k.$$

1) Пусть $u^h = v^h + q^h$. Найти формулировку Галеркина данной задачи:

$$a(w^h, v^h) + \dots = (w^h, f) + w^h(0)k - a(w^h, q^h) - \dots$$

2) Найти

$$K_{AB} = a(N_A, N_B) + \dots$$

и

$$k_{ab}^e = a(N_a, N_b)^e + \dots$$

3) Определить точное выражение для

$$k^e = (k_{ab}^e)_{a,b=1,2} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

4) Доказать, что матрица K симметрична.

5) Доказать, что матрица K положительно определена. Является ли условие $w^h(1) = 0$ необходимым для этого?

6) Функция Грина для данного уравнения удовлетворяет тождеству

$$g_{,xx} - \lambda g + \delta_y = 0,$$

и имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} c_1 e^{px} + c_2 e^{-px} & x \in [0, y] \\ c_3 e^{px} + c_4 e^{-px} & x \in [y, 1], \end{cases}$$

где $p = \frac{\lambda}{2}$, а константы c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) определяются из системы уравнений, представляющие собой граничные условия и условие непрерывности функции

$$g(1) = 0$$

$$g_{,x}(0) = 0$$

$$g(y+) = g(y-)$$

$$g_{,x}(y+) = g_{,x}(y-) - 1.$$

Доказать, что в этом случае решение не будет точным в узлах.

7) Рассмотрим экспоненциальные базисные функции $N_1(x)$, $N_2(x)$ на каждом элементе, то есть

$$u^h(x) = d_1^e N_1(x) + d_2^e N_2(x), \quad x \in \Omega^e,$$

причем

$$u^h(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$$

Константы c_i ($i = 1, 2$) определяются из системы уравнений

$$d_a^e = u^h(x_a^e), \quad a = 1, 2.$$

Будет ли приближенное решение в таком виде непрерывно в узлах.

1.15.2 Уравнение $\lambda u + \frac{d^3 u}{dx^3} = f$

Пусть дано уравнение

$$u_{,xxx} + \lambda u = f \text{ на } \Omega = [0, 1].$$

Граничные условия можно представить в виде

$$u(0) = \alpha, \quad u_{,x}(0) = -\beta, \quad u_{,xx}(0) = \gamma.$$

1) Найти слабую формулировку соответствующей задачи (три раза интегрировать по частям).

2) Рассмотрим базисные функции в виде квадратичных полиномов N_1, N_2, N_3 на каждом элементе. Найти матричную формулировку Галеркина для данной задачи

3) Построить матрицы K, k^e .

4) Найти аналог функции Грина для данного уравнения

$$g_{,xxx} + \lambda g = \delta_y.$$

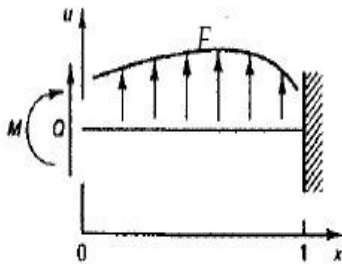
5) Будет ли приближенное решение точно в узлах?

1.15.3 Теория стержней Бернулли Эйлера и эрмитовы кубики

Приведем сильную формулировку краевой задачи для тонкого бруса, закрепленного с одной стороны и с заданными силой сдвига и моментом с другой стороны. Пусть стержень представляет собой отрезок $\Omega = [0, 1]$.

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{По данным функции } \mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ и константам } M, Q \\ \text{найти такую функцию } u, \text{ что} \\ IEu_{,xxxx} = \mathcal{F} \text{ на } \Omega \text{ (Уравнение равновесия)} \\ u(1) = 0 \text{ (один конец стержня закреплен)} \\ u_x(1) = 0 \text{ (и неподвижен)} \\ IEu_{,xx}(0) = M \text{ (заданный момент движения на} \\ \text{другом конце)} \\ IEu_{,xxx}(0) = Q \text{ (заданная сила на другом конце).} \end{array} \right.$$

Здесь E — модуль Юнга, а I — момент инерции.



Пусть теперь $\mathcal{S} = \mathcal{V} = \{w \in H^2(\Omega) | w(1) = w_{,x}(1) = 0\}$. Тогда соответствующая слабая формулировка задачи принимает

вид

$$(W) \begin{cases} \text{По данным функции } \mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ и константам } M, Q \\ \text{найти такую функцию } u \in \mathcal{S}, \text{ что для каждой } w \in \mathcal{V} \\ a(w, u) = (w, \mathcal{F}) - Mw_{,x}(0) + Qw(0). \end{cases}$$

Здесь

$$a(w, u) = \int_0^1 w_{,xx} I E u_{,xx} dx$$

$$(w, \mathcal{F}) = \int_0^1 w \mathcal{F} dx.$$

Пусть $\mathcal{S}^h = \mathcal{V}^h$ — конечномерное приближение \mathcal{S} . Пусть, в частности, $w^h \in \mathcal{S}^h$ удовлетворяет условиям $w^h(1) = w_{,x}^h(1) = 0$.

Тогда формулировка Галеркина для данной задачи задается следующим образом:

$$(G) \begin{cases} \text{По данным функции } \mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ и константам } M, Q \\ \text{найти такую функцию } u^h \in \mathcal{S}^h, \text{ что для каждой } w^h \in \mathcal{V}^h \\ a(w^h, u^h) = (w^h, \mathcal{F}) - Mw_{,x}^h(0) + Qw^h(0). \end{cases}$$

1) Предполагая все функции гладкими и ограниченными, доказать, что решения (S) и (W) совпадают. Привести естественные граничные условия.

2) Пусть $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = 1$ и $\mathcal{V}^h = \{w^h \in C^1(\Omega) | w^h(1) = w_{,x}^h(1) = 0, w^h|_{[x_A, x_{A+1}]} - \text{кубический полином}\}$. Это пространство называется пространством эрмитовых кубических базисных функций. Заметим, что $w^h \in \mathcal{V}^h$ в общем случае не принадлежит $C^2(\Omega)$.

Доказать, что w^h на каждом подотрезке $[x_A, x_{A+1}]$ можно представить в виде

$$w^h(x) = N_1(x)w^h(x_1) + N_3(x)w^h(x_2) + N_2(x)w_{,x}^h(x_1) + N_4(x)w_{,x}^h(x_2),$$

где

$$N_1(x) = \frac{-(x - x_2)^2(-h + 2(x_1 - x))}{h^3}$$

$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)^2}{h^2}$$

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)^2(h + 2(x_2 - x))}{h^3}$$

$$N_4(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)}{h^2}$$

Учзание к решению:

Положим $w^h(x) - c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$. Определим константы c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) из условий

$$w^h(x_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 + c_4x_1^3$$

$$w^h(x_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 + c_4x_2^3$$

$$w_{,x}^h(x_1) = c_2 + 2c_3x_1 + 3c_4x_1^2$$

$$w_{,x}^h(x_2) = c_2 + 2c_3x_2 + 3c_4x_2^2$$

Построить графики функций N_i , ($i = 1, 2, 3, 4$).

Пространство конечных элементов из этого пункта дает решение, которое как само так и его первая производная точно в узлах.

3) Найти точки в которых оптимальноприближается кри-
визна точного решения. Подобные задачи необходимы для ис-
следования возможных изгибаний стержня.

4) Оценить сходимость к точному решению в точках из
пункта 3).

5) Найти координаты точек из пунта 3) при условии, что
сегмент $[x_A, x_{A+1}]$ стержня не нагружен, то сть $u_{,xxxx} = 0$.

6) Пусть $n_{el} = 1$, то есть мы имеем дело с одним элемен-
том, и $\mathcal{F} = c = \text{const}$. Найти и решить уравнение Галеркина.
Построить графики u^h , $u_{,x}^h$, $u_{,xx}^h$, u , $u_{,x}$, $u_{,xx}$.

7) Доказать, что

$$u^h(x_A) = u(x_A)$$

$$u_{,x}^h(x_A) = u_{,x}(x_A).$$

8) Доказать, что при $\mathcal{F} = c = \text{const}$ в точках оптимального приближения кривизны на самом деле присутствует совпадение значений, то есть

$$u_{,xx}^h(x_o) = u_{,xx}(x_o).$$

9) Найти матрицу жесткости размерности 4×4

$$k_{pq}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_{p,xx} I E N_{q,xx} dx, \quad p, q = 1, 2, 3, 4.$$

10) В слабой формулировка задачи предположим, что $w \in \mathcal{V}$ и $u \in \mathcal{S}$ принадлежат пересечению классов $C^1((x_A, x_{A+1}))$, $A = 1, \dots, n$. Доказать, что

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{A=1}^n \int_{x_A}^{x_{A+1}} w(I E u_{,xxxx} - \mathcal{F}) dx - \\ & - w_{,x}(0)(I E u_{,xx}(0+) - M) + \\ & + w(0)(I E u_{,xxx}(0+) - Q) - \\ & - \sum_{A=2}^n w_{,x}(x_A) I E (u_{,xx}(x_{A+}) - u_{,xx}(x_{A-})) + \\ & + \sum_{A=2}^n w(x_A) I E (u_{,xxx}(x_{A+}) - u_{,xxx}(x_{A-})). \end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что условия Эйлера-Лагранжа имеют вид

I. $I E u_{,xxxx}(x) = \mathcal{F}(x)$, $x \in (x_A, x_{A+1})$, $A = 1, 2, \dots, n$.

II. $I E u_{,xx}(0+) = M$.

III. $I E u_{,xxx}(0+) = Q$.

IV. $I E u_{,xx}(x_{A+}) = I E u_{,xx}(x_{A-})$, $A = 2, \dots, n$.

V. $I E u_{,xxx}(x_{A+}) = I E u_{,xxx}(x_{A-})$, $A = 2, \dots, n$.

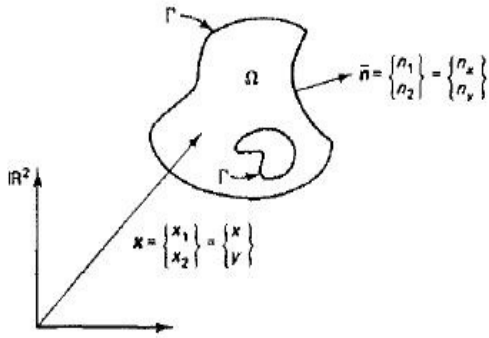
То есть решение задачи Галеркина приближает все пункты I-V, которые выполняются для точного решения.

Глава 2

Двумерные и пространственные задачи

2.1 Введение

Пусть n_{sd} — число измерений пространства. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ — область с кусочно-гладкой границей Γ . Обозначим единичный, направленный вовне Ω вектор нормали к границе через \bar{n} .



Пусть Γ раскладывается в объединение

$$\Gamma = \overline{\Gamma_g \bigcup \Gamma_k}, \quad (2.1)$$

$$\Gamma_q \bigcap \Gamma_k = \emptyset. \quad (2.2)$$

Здесь Γ_g, Γ_k — открытые подмножества Γ .

Пример. Пусть $\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ — единичный круг. Тогда $\Gamma = \{x, y \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ — окружность. Пусть

$$\Gamma_g = \Gamma \bigcap \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}. \quad (2.3)$$

Тогда граница Γ_g — двухточечное множество $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 | x = -1, y = 0 \text{ и } x = 1, y = 0\}$. То есть

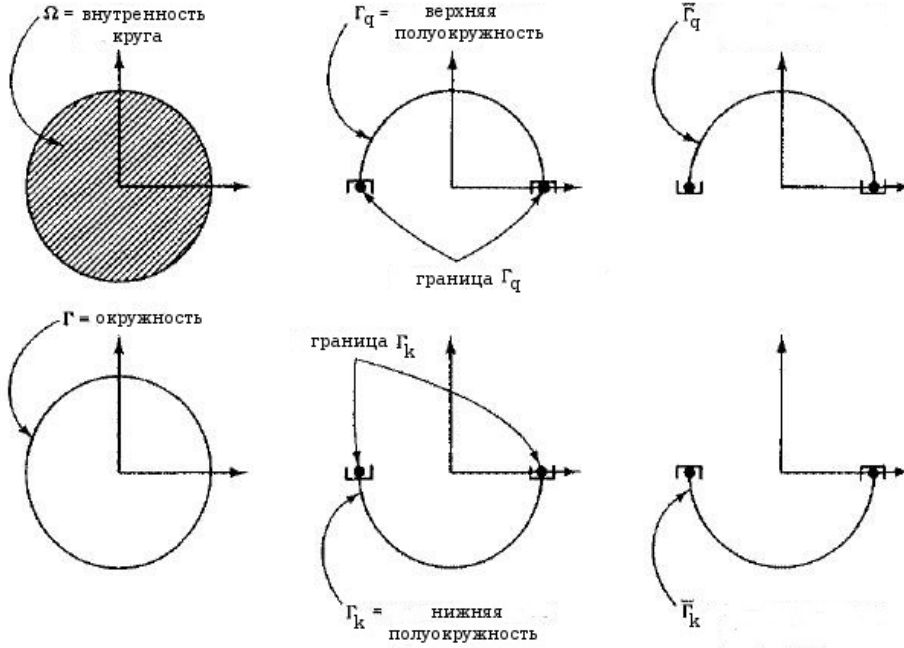
$$\overline{\Gamma_g} = \Gamma \bigcap \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}. \quad (2.4)$$

Аналогично, положим

$$\Gamma_k = \Gamma \cap \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 | y < 0\}. \quad (2.5)$$

Тогда

$$\overline{\Gamma_k} = \Gamma \cap \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 | y \leq 0\}. \quad (2.6)$$



В дальнейшем будем предполагать, что $\Gamma_g \neq \emptyset$, но не исключаем того, что $\Gamma_k = \emptyset$. Также будем обозначать через $u_{,i}$ частную производную по координате с номером i , то есть $u_{,1} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{,2} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{,3} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Нам потребуются еще следующие результаты:

Теорема 5. (Теорема Стокса для поверхностей в \mathbb{R}^3). Пусть $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Тогда

$$\int_{\Omega} f_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_i d\Gamma. \quad (2.7)$$

Следствием этого утверждения является

Теорема 6. (Интегрирование по частям). Пусть $f, g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции. Тогда

$$\int_{\Omega} f_{,i} g d\Omega = - \int_{\Omega} f g_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma} f g n_i d\Gamma. \quad (2.8)$$

Доказательство. Проинтегрируем тождество

$$(fg)_{,i} = f_{,i}g + fg_{,i}$$

и получим

$$\int_{\Omega} (fg)_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} f_{,i}g d\Omega + \int_{\Omega} fg_{,i} d\Omega.$$

Затем применим Теорему 5 к левой части полученного равенства. \square

2.2 Уравнение теплопроводности. Сильная и слабая формулировки

Пусть q_i — координаты вектора потока тепла, u — температура, \mathcal{F} — приток тепла в единичном объеме. Пусть еще вектор теплового потока определен с помощью градиента температуры

$$q_i = -\kappa_{ij}u_{,j}, \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji}. \quad (2.9)$$

Здесь компоненты тензора теплопередачи κ_{ij} — некоторые известные функции от \bar{x} . Если κ_{ij} постоянны, то тело называется однородным. Матрица $\kappa = (\kappa_{ij})$ предполагается положительно-определенной. На практике наиболее часто встречается случай $\kappa_{ij} = \kappa(x)\delta_{ij}$.

Приведем постановку краевой задачи в сильной форме.

$$(S) \begin{cases} \text{По данным функциям } \mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}, k : \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{найти такую функцию } u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ что} \\ q_{i,i}|_{\Omega} = \mathcal{F}; \\ u|_{\Gamma_g} = g; \\ -q_i n_i|_{\Gamma_k} = k. \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь функции g и k — данные граничные температура и поток тепла. Первое условие — условие Дирихле, второе — условие Неймана.

Посторим теперь слабую формулировку данной задачи. Для этого нам потребуются пространства \mathcal{S} и \mathcal{V} . Потребуем, чтобы все элементы \mathcal{S} удовлетворяли условию Дирака, при этом $w \in \mathcal{V}$ влечет

$$w|_{\Gamma_g} = 0. \quad (2.11)$$

Тогда слабая формулировка задачи принимает вид

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{По данным функциям } \mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}, k : \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{найти такую функцию } u \in \mathcal{S}, \\ \text{что для каждой функции } w \in \mathcal{V} \\ - \int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega = \int_{\Omega} w \mathcal{F} d\Omega + \int_{\Gamma_k} w k d\Gamma. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Теорема 7. *Допустим, что все функции имеют достаточно большой порядок гладкости. Тогда решение (S) является решением (W) и наоборот.*

Доказательство. Пусть u — решение (S). В силу условия Дирихле, $u \in \mathcal{S}$. Пусть $w \in \mathcal{V}$ — произвольная функция. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} w \underbrace{(q_{i,i} - \mathcal{F})}_{=0} d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega + \int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega} w \mathcal{F} d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega + \int_{\Gamma_k} w k d\Gamma - \int_{\Omega} w \mathcal{F} d\Omega. \end{aligned}$$

Следовательно, u — решение (W).

Пусть теперь u — решение (W). Тогда $u = g$ на Γ_g и для всех $w \in \mathcal{V}$

$$0 = \int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega + \int_{\Omega} w \mathcal{F} d\Omega + \int_{\Gamma_k} w k d\Gamma =$$

$$= \int_{\Omega} w(-q_{i,i} + \mathcal{F})d\Omega + \int_{\Gamma_k} w(n_i q_i + k)d\Gamma. \quad (2.13)$$

Пусть

$$\alpha = -q_{i,i} + \mathcal{F}$$

$$\beta = n_i q_i + k.$$

Для того, чтобы доказать, что удовлетворяются тождества (S), осталось проверить, что

$$\alpha|_{\Omega} = 0,$$

$$\beta|_{\Gamma_k} = 0.$$

Рассмотрим $w = \alpha\phi$, где

$$1) \phi|_{\Omega} > 0,$$

$$2) \phi|_{\Gamma} = 0,$$

3) ϕ — гладкая функция.

При этом $w \in \mathcal{V}$. Тождество (2.13) переходит в уравнение

$$0 = \int_{\Omega} \alpha^2 \phi d\Omega.$$

Следовательно, $\alpha|_{\Omega} = 0$.

Пусть теперь $w = \beta\psi$, где

$$1') \psi|_{\Gamma_k} > 0,$$

$$2') \psi|_{\Gamma_g} = 0,$$

3') ψ — гладкая функция.

При этом опять $w \in \mathcal{V}$. Тождество (2.13) переходит в уравнение (с учетом того, что $\alpha = 0$)

$$0 = \int_{\Gamma_k} \beta^2 \psi d\Gamma.$$

Следовательно, $\beta|_{\Gamma_k} = 0$. То есть, u — решение (S). □

Из соображений сокращения записи можно воспользоваться следующими обозначениями:

$$a(w, u) = \int_{\Omega} w_{,i} \kappa_{ij} u_{,j} d\Omega, \quad (2.14)$$

$$(w, \mathcal{F}) = \int_{\Omega} w \mathcal{F} d\Omega, \quad (2.15)$$

$$(w, k)_{\Gamma} = \int_{\Gamma_k} w k d\Gamma. \quad (2.16)$$

Тогда можно переписать (2.12) в следующем виде:

$$a(w, u) = (w, \mathcal{F}) + (w, k)_{\Gamma}. \quad (2.17)$$

Пусть $\nabla u = \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix}$ — градиент функции u . Тогда подинтегральное выражение в формуле (2.14) можно переписать в виде

$$w_{,i} \kappa_{ij} u_{,j} = (\nabla w)^T \kappa \nabla u \quad (2.18)$$

То есть (2.14) переходит в

$$a(w, u) = \int_{\Omega} (\nabla w)^T \kappa \nabla u d\Omega. \quad (2.19)$$

2.3 Уравнение теплопроводности. Формулировка Галеркина

Пусть $\mathcal{S}^h, \mathcal{V}^h$ — конечномерные приближения \mathcal{S}, \mathcal{V} , соответственно. Мы предполагаем, что любой элемент \mathcal{V}^h обращается в 0 на Γ_g и каждый элемент $u^h \in \mathcal{S}^h$ допускает представление

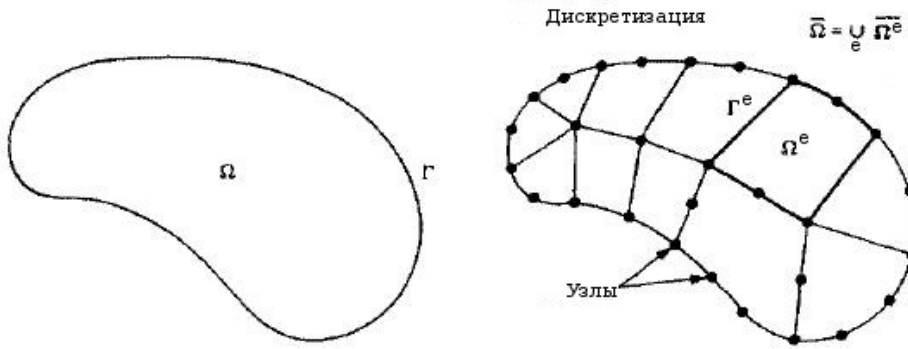
$$u^h = v^h + g^h, \quad (2.20)$$

где $v^h \in \mathcal{V}^h$, а g^h удовлетворяет или хотя бы приближает граничные условия $u|_{\Gamma_g} = g$.

Тогда формулировка Галеркина задачи принимает вид

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{По данным функциям } \mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}, k : \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{найти такую функцию } u^h = v^h + g^h \in \mathcal{S}^h, \\ \text{что для каждой } w^h \in \mathcal{V}^h \\ a(w^h, v^h) = (w^h, \mathcal{F}) + (w^h, k)_\Gamma - a(w^h, g^h). \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Рассмотрим теперь разбиение области Ω на элементы Ω^e , $e = 1, \dots, n_{el}$.



Пусть $\eta = \{1, 2, \dots, n_{np}\}$ — глобальная нумерация множества узлов, здесь n_{np} — число узлов. Будем говорить, что узел — g -узел, если в этой точке $u^h = g$. Обозначим через $\eta_g \subset \eta$ множество всех g -узлов. Дополнение η_g в множестве η — множество узлов $\eta \setminus \eta_g$. На множестве $\eta \setminus \eta_g$ значение u^h требуется определить. Следовательно, число уравнений n_{eq} равно количеству узлов в η_g .

Предположим, что типичный представитель \mathcal{V}^h имеет вид

$$w^h(x) = \sum_{A \in \eta \setminus \eta_g} c_A N_A(x), \quad (2.22)$$

где N_A — базисная функция, соответствующая узлу A , а $c_a \in \mathbb{R}$ — константа. Мы будем считать, что $w^h = 0$ тогда и только тогда, когда $c_A = 0$ для каждого $A \in \eta \setminus \eta_g$.

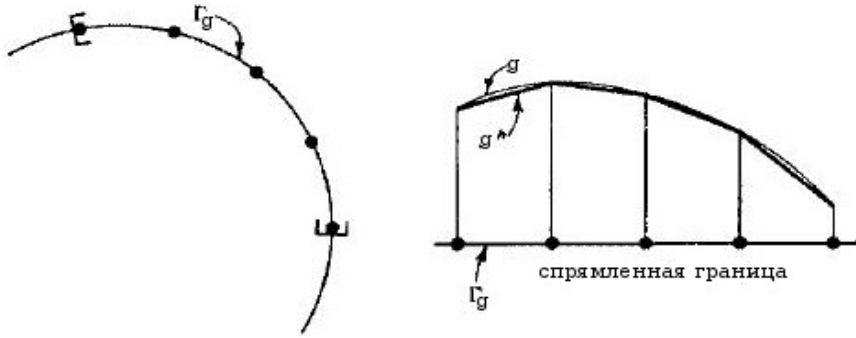
Аналогично

$$v^h(x) = \sum_{A \in \eta \setminus \eta_g} d_A N_A(x), \quad (2.23)$$

где d_A – неизвестная константа, равная температуре в узле A , и

$$g^h(x) = \sum_{A \in \eta_g} g_A N_A(x), \quad g_A = g(x_A). \quad (2.24)$$

Тождество (2.24) означает, что g^h — интерполяция g с помощью базисных функций. Также возможную погрешность вычислений увеличивает 1) использование \mathcal{F}^h и k^h вместо \mathcal{F} и k , соответственно; 2) приближение области определения, при котором границы элементов не совпадают, вообще говоря, с границей Γ .



Подставим теперь выражения (2.22)–(2.24) в уравнение (2.21) и после рассуждений, аналогичных приведенным в первой главе, получим

$$\sum_{B \in \eta \setminus \eta_g} d_B a(N_A, N_B) = (N_A, \mathcal{F}) + (N_A, k)_\Gamma - \sum_{B \in \eta \setminus \eta_g} g_B a(N_A, N_B), \quad A \in \eta \setminus \eta_g. \quad (2.25)$$

Для того, чтобы найти глобальную матрицу жесткости и вектор сил, сначала необходимо упорядочить множество уравнений. Введем для этого массив ID , который сопоставляет каждому узлу A соответствующий глобальный номер уравнения, то есть

$$ID(A) = \begin{cases} P \text{ (глобальный номер уравнения)}, & A \in \eta \setminus \eta_g \\ 0, & A \in \eta_g. \end{cases} \quad (2.26)$$

Здесь $P = 1, \dots, n_{eq}$. Размер массива ID равен n_{np} .

Соответственно можно построить и матричный эквивалент (2.25).

$$K\bar{d} = \bar{F}, \quad (2.27)$$

$$K = (K_{PQ}), \bar{d} = (d_Q), \bar{F} = (F_Q), P, Q = 1, \dots, n_{eq}. \quad (2.28)$$

$$K_{PQ} = a(N_A, N_B), P = ID(A), Q = ID(B). \quad (2.29)$$

$$F_P = (N_A, \mathcal{F}) + (N_A, k)_\Gamma - \sum_{B \in \eta_g} g_B a(N_A, N_B). \quad (2.30)$$

Теорема 8. *Матрица K*

- 1) *Симметрична;*
- 2) *Положительно определена.*

Доказательство. 1) Симметричность K следует напрямую из определения K :

$$\begin{aligned} K_{PQ} &= a(N_A, N_B) = \\ &= a(N_B, N_A) = \\ &= K_{QP}. \end{aligned}$$

2) Ассоциируем с каждым n_{eq} -вектором $\bar{c} = (c_P)$ представителя пространства \mathcal{V}^h по формуле $w^h = \sum_{A \in \eta \setminus \eta_g} \tilde{c}_A N_A$, где $\tilde{c}_A = c_P$,

$$P = ID(A).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{c}^T K \bar{c} &= \sum_{P, Q=1}^{n_{eq}} c_P K_{PQ} c_Q = \\ &= \sum_{A, B \in \eta \setminus \eta_g} \tilde{c}_A a(N_A, N_B) \tilde{c}_B = \\ &= a\left(\sum_{A \in \eta \setminus \eta_g} \tilde{c}_A N_A, \sum_{B \in \eta \setminus \eta_g} \tilde{c}_B N_B\right) = \\ &= a(w^h, w^h) = \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{w_{,i}^h \kappa_{ij} w_{,j}^h}_{\geq 0} d\Omega \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\bar{c}^T K \bar{c} = 0$. По доказанному ранее

$$\int_{\Omega} \underbrace{w_{,i}^h \kappa_{ij} w_{,j}^h}_{\geq 0} d\Omega = 0.$$

Следовательно,

$$w_{,i}^h \kappa_{ij} w_{,j}^h = 0.$$

Так как матрица κ положительно определена, получим $w_{,i}^h = 0$. То есть w^h — константа. При этом $w^h|_{\Gamma_g} = 0$, $\Gamma_g \neq \emptyset$, следовательно $w^h|_{\Omega} = 0$. По определению w^h получаем, что все коэффициенты $c_P = 0$, следовательно $\bar{c} = \theta$. \square

Заметим, что для доказательства положительной определенности и, следовательно, обратимости матрицы K необходимо было использовать как положительную определенность κ , так и нулевое граничное условие на функции из \mathcal{V}^h .

2.4 Уравнение теплопроводности. Вычисление матрицы жесткости и вектора сил

Как и в одномерной задаче, представим глобальные тензоры в виде суммы локальных.

$$K = \sum_{e=1}^{n_{el}} K^e, \quad K^e = (K_{PQ}^e), \quad (2.31)$$

$$\bar{F} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \bar{F}^e, \quad \bar{F}^e = (F_P^e) \quad (2.32)$$

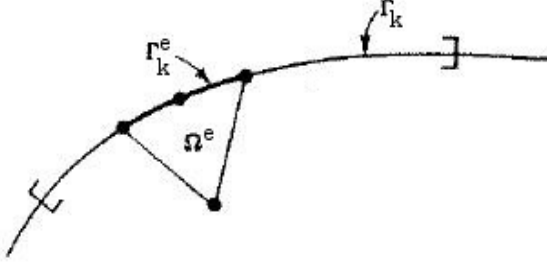
Здесь

$$K_{PQ}^e = a(N_A, N_B) = \int_{\Omega^e} (\nabla N_A)^T \kappa \nabla N_B d\Omega. \quad (2.33)$$

$$F_P^e = (N_A, \mathcal{F})^e + (N_A, k)_{\Gamma}^e - \sum_{A \in \eta_g} g_B a(N_A, N_B)^e =$$

$$= \int_{\Omega^e} N_A \mathcal{F} d\Omega + \int_{\Gamma_k^e} N_A k d\Gamma - \sum_{A \in \eta_g} g_B a (N_A, N_B)^e. \quad (2.34)$$

$$\Gamma_k^e = \Gamma_k \cap \Gamma^e, \quad P = ID(A), \quad Q = ID(B). \quad (2.35)$$



Для каждого элемента опять определим свои локальные матрицу жесткости и вектор сил.

$$k^e = (k_{ab}^e), \quad \bar{f}^e = (f_a^e), \quad a, b = 1, \dots, n_{en}. \quad (2.36)$$

$$k_{ab}^e = a(N_a, N_b)^e = \int_{\Omega^e} (\nabla N_a)^T \kappa \nabla N_b d\Omega. \quad (2.37)$$

$$f_a^e = \int_{\Omega^e} N_a \mathcal{F} d\Omega + \int_{\Gamma_k^e} N_a k d\Gamma - \sum_{b=1}^{n_{en}} k_{ab}^e g_b^e, \quad (2.38)$$

где n_{en} — число узлов элемента, а $g_b^e = g(x_b^e)$ если g определена в узле x_b^e и $g_b^e = 0$, иначе.

Матрицу k^e можно представить в стандартном виде, удобном для программирования:

$$k^e = \int_{\Omega^e} B^T D B d\Omega, \quad (2.39)$$

где, в данном случае,

$$\underbrace{D}_{n_{sd} \times n_{sd}} = \kappa, \quad (2.40)$$

$$\underbrace{B}_{n_{sd} \times n_{en}} = (B_1, B_2, \dots, B_{n_{en}}) \quad (2.41)$$

$$\underbrace{B_a}_{n_{sd} \times 1} = \nabla N_a. \quad (2.42)$$

Для каждой компоненты k^e имеем

$$k_{ab}^e = \int_{\Omega^e} B_a^T D B_b d\Omega. \quad (2.43)$$

2.5 Задачи

2.5.1 Задача 1.

Пусть

$$\underbrace{\bar{d}^e}_{n_{en} \times 1} = (d_a^e) = \begin{pmatrix} d_1^e \\ d_2^e \\ \vdots \\ d_{n_{en}}^e \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

где

$$d_a^e = u^h(x_a^e). \quad (2.45)$$

Вектор \bar{d}^e называется вектором температуры элемента. Доказать, что вектор потока тепла в точке $x \in \Omega^e$ можно найти по формуле

$$\bar{q}(x) = -D(x)B(x)\bar{d}^e = -D(x) \sum_{a=1}^{n_{en}} B_a d_a^e. \quad (2.46)$$

2.5.2 Задача 2.

Рассмотрим сильную постановку краевой задачи для классического линейного уравнения теплопроводности, в которой k -условие Неймана заменено тождеством

$$\lambda u - q_i n_i = k \text{ на } \Gamma_k. \quad (2.47)$$

Здесь $\lambda \geq 0$ — заданная функция от $x \in \Gamma_k$.

Обобщить слабую формулировку, включив в нее (2.47) в качестве естественного граничного условия. Найти дополнительный вклад, который вносит в k^e условие (2.47). Доказать, что K — положительно определенная матрица.

Условие (2.47) — эквивалент Закона Ньютона теплопереноса, λ — коэффициент теплопереноса. Это условие используют в случае, когда поток тепла пропорционален разности температур поверхности тела и окружающей среды, это отношение формально — k/λ в тождестве (2.47).

2.6 Уравнение теплопроводности. Массивы обработки данных ID , IEN , LM

Информация об узлах элементов хранится в массиве IEN , в котором производится соответствие между локальным номером узла и глобальным.

$$IEN(a, e) = A, \quad (2.48)$$

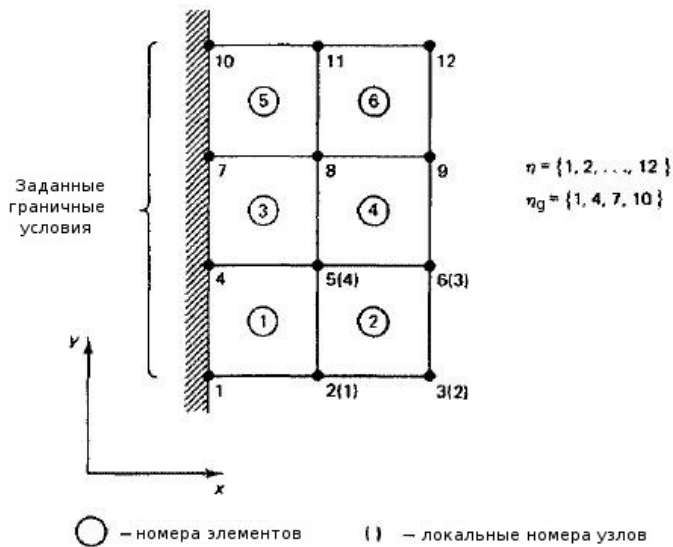
где a — локальный номер узла. e — номер элемента, A — глобальный номер узла.

Информация о соответствии между глобальным номером узла и глобальным номером уравнения снова содержится в массиве ID . Таким образом, массивы ID , IEN получены непосредственно из исходных данных. Построим теперь массив LM :

$$LM(a, e) = ID(IEN(a, e)) \quad (2.49)$$

2.6.1 Пример 1

Рассмотрим прямоугольную область, разбитую на квадратные элементы.



Тогда массив ID имеет вид

Глобальные номера узлов (A)												$(n_{np} = 12)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
0*	1	2	0	3	4	0	5	6	0	7	8	$(n_{eq} = 8)$

При этом, напомним, глобальный номер уравнения $P = ID(A)$.

Массив IEN имеет вид

Номера элементов (e)							$(n_{el} = 6)$
1 2 3 4 5 6							
Локальные номера узлов (a)	1	1	2	4	5	7	8
	2	2	3	5	6	8	9
	3	5	6	8	9	11	12
	4	4	5	7	8	10	11
							$(n_{en} = 4)$

Здесь $A = IEN(a, e)$.

Массив LM имеет вид

		Номера элементов (e)					
		1	2	3	4	5	6
Локальные номера узлов (a)	1	0*	1	0	3	0	5
	2	1	2	3	4	5	6
	3	3	4	5	6	7	8
	4	0	3	0	5	0	7

$(n_{el} = 6)$

$(n_{en} = 4)$

Здесь $P = LM(a, e) = ID(IEN(a, e))$.

Таким образом, можно определить значения g_a^e в терминах массивов IEN и LM :

$$g_a^e = \begin{cases} 0, & LM(a, e) \neq 0 \\ g_A, & LM(a, e) = 0, \text{ где } A = IEN(a, e). \end{cases} \quad (2.50)$$

2.6.2 Пример 2

Пусть e — обычный четырехузловой элемент. Пусть значения массива LM на этом элементе дан следующим образом:

$$\begin{cases} LM(1, e) = 5 \\ LM(2, e) = 0 \\ LM(3, e) = 0 \\ LM(4, e) = 9. \end{cases} \quad (2.51)$$

Из тождеств (2.51) получаем, что вклад, который вносит данный элемент в глобальные тензоры определен по формулам

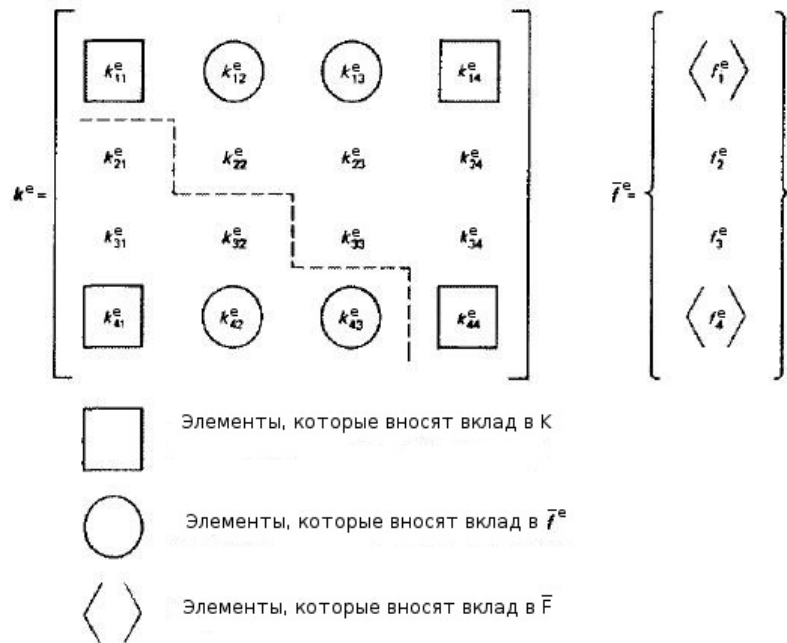
$$\begin{cases} K_{55} \leftarrow K_{55} + k_{11}^e \\ K_{59} \leftarrow K_{59} + k_{14}^e \\ K_{95} \leftarrow K_{95} + k_{41}^e \\ K_{99} \leftarrow K_{99} + k_{44}^e. \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} F_5 \leftarrow F_5 + f_1^e \\ F_9 \leftarrow F_9 + f_4^e. \end{cases} \quad (2.53)$$

Заметим, что ни один из элементов из второго и третьего столбцов и тех же строк матрицы k^e не оказывает влияния на K .

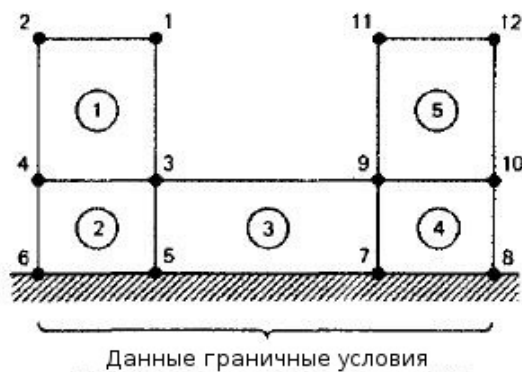
Однако, эти элементы могут менять \bar{F} через посредство f_1^e и f_4^e , поскольку по формуле (2.38)

$$\begin{aligned} f_1^e &= \dots - k_{12}^e g_2^e - k_{13}^e g_3^e \\ f_4^e &= \dots - k_{42}^e g_2^e - k_{43}^e g_3^e. \end{aligned} \quad (2.54)$$



2.6.3 Задача

Построить для приведенного разбиения области массивы ID , IEN , LM .



2.7 Линейная теория упругости. Сильная и слабая постановки задачи

Пусть σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_i — координаты вектора смещений, f_i — координаты вектора сил в единичном объеме. Определим тензор деформаций ϵ_{ij} как симметризованные градиенты смещений:

$$\epsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}. \quad (2.55)$$

Тензор напряжений получается из тензора деформаций по обобщенному закону Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (2.56)$$

где c_{ijkl} (коэффициенты упругости) — некоторые известные функции от \bar{x} . Предполагается, что c_{ijkl} обладают следующими свойствами:

Симметрия

$$c_{ijkl} = c_{klij} \text{ (главная симметрия)} \quad (2.57)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{jikl} \\ c_{ijkl} &= c_{ijlk} \end{aligned} \right\} \text{ (малые симметрии)} \quad (2.58)$$

Положительная определенность

$$c_{ijkl}(\bar{x})\psi_{ij}\psi_{kl} \geq 0 \quad (2.59)$$

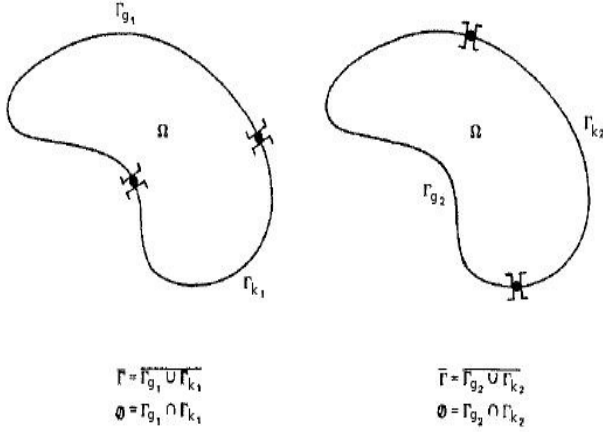
$$c_{ijkl}(\bar{x})\psi_{ij}\psi_{kl} = 0 \text{ влечет } \psi_{ij} = 0 \quad (2.60)$$

для всех $\bar{x} \in \Omega$ и всех $\psi_{ij} = \psi_{ji}$.

В следующем параграфе будет показано, что (2.57) влечет симметричность K . Первая из малых симметрий, в свою очередь, влечет симметричность тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Условие положительной определенности вкупе с подходящими граничными условиями на вектор смещений влечет положительную определенность матрицы K .

В данной задаче считаем неизвестным вектор смещений. Следствием такой постановки является необходимость обобщения граничных условий. Мы будем полагать, что Γ допускает разложение

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma = \overline{\Gamma_{g_i} \cup \Gamma_{k_i}} \\ \Gamma_{g_i} \cap \Gamma_{k_i} = \emptyset \end{array} \right\} i = 1, \dots, n_{sd} \quad (2.61)$$



Приведем постановку краевой задачи в сильной форме.

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{По данным функциям } f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g_i : \Gamma_{g_i} \rightarrow \mathbb{R}, \\ k_i : \Gamma_{k_i} \rightarrow \mathbb{R} \text{ найти такие функции } u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ что} \\ \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ на } \Omega \\ u_i = g_i \text{ на } \Gamma_{g_i} \\ \sigma_{ij} n_j = k_i \text{ на } \Gamma_{k_i}, \end{array} \right. \quad (2.62)$$

где σ_{ij} определены через u_i по формулам (2.55), (2.56).

Функции g_i и k_i называются заданными краевыми сдвигами и нагрузками, соответственно. Задача (S) иногда называется смешанной задачей теории упругости. Если $\Gamma_{k_i} = \emptyset$, то задача называется первой основной задачей теории упругости, если же $\Gamma_{g_i} = \emptyset$, то задача называется второй основной задачей теории упругости.

Пусть \mathcal{S}_i — пространство пробных решений, а \mathcal{V}_i — пространство вариаций. Тогда каждый представитель $u_i \in \mathcal{S}_i$ удовлетворяет условию $u_i = g_i$ на Γ_{g_i} , при этом для любой функции $w_i \in \mathcal{V}_i$ $w_i = 0$ на Γ_{g_i} .

Приведем теперь постановку краевой задачи в слабой форме.

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{По данным функциям } f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g_i : \Gamma_{g_i} \rightarrow \mathbb{R}, \\ k_i : \Gamma_{k_i} \rightarrow \mathbb{R} \text{ найти такие функции } u_i \in \mathcal{S}_i, \\ \text{что для любой } w_i \in \mathcal{V}_i \\ \int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \sum_{i=1}^{n_{sd}} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i k_i d\Gamma, \end{array} \right. \quad (2.63)$$

где σ_{ij} определены через u_i по формулам (2.55), (2.56).

В литературе по механике (W) иногда называют законом виртуальной работы или законом виртуальных смещений.

Теорема 9. *Пусть все рассматриваемые функции имеют достаточно большой порядок кратности. Тогда решение (S) будет решением (W), и наоборот.*

Для доказательства теоремы потребуется несколько технических лемм.

Лемма 4. *(Евклидово разложение тензора второго порядка) Пусть s_{ij} — произвольный тензор, Тогда $s_{ij} = s_{(ij)} + s_{[ij]}$, где $s_{(ij)}$ симметричный тензор, $s_{[ij]}$ — кососимметричный.*

Доказательство. Положим

$$s_{(ij)} = \frac{s_{ij} + s_{ji}}{2} \quad (2.64)$$

$$s_{[ij]} = \frac{s_{ij} - s_{ji}}{2} \quad (2.65)$$

Легко проверить, что данные тензоры удовлетворяют условиям леммы. □

Лемма 5. *Пусть s_{ij} — произвольный тензор, а t_{ij} — симметричный тензор, Тогда*

$$s_{ij} t_{ij} = s_{(ij)} t_{ij} \quad (2.66)$$

Доказательство. По Лемме 4 $s_{ij} = s_{(ij)} + s_{[ij]}$. Поскольку

$$s_{ij}t_{ij} = s_{(ij)}t_{ij} + s_{[ij]}t_{ij},$$

достаточно доказать, что $s_{[ij]}t_{ij} = 0$.

Докажем это:

$$\begin{aligned} s_{[ij]}t_{ij} &= -s_{[ji]}t_{ij} = \\ &= -s_{[ji]}t_{ji} = \\ &= -s_{[ij]}t_{ij}. \end{aligned}$$

То есть, $s_{[ij]}t_{ij} = -s_{[ij]}t_{ij} = 0$.

□

Докажем теперь теорему.

Доказательство. Пусть u_i — решение (S). Тогда $u_i \in \mathcal{S}_i$. Умножим (2.62) на $w_i \in \mathcal{V}_i$ и проинтегрируем по Ω .

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} w_i(\sigma_{ij,j} + f_i) d\Omega = - \int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega + \sum_{i=1}^{n_{sd}} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i k_i d\Gamma + \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega \end{aligned}$$

Следовательно, u_i — решение (W).

Пусть теперь u_i — решение (W). Поскольку $u_i \in \mathcal{S}_i$, $u_i|_{\Gamma_{g_i}} = g_i$. Тогда (2.63) влечет

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \underbrace{w_{(i,j)} \sigma_{ij}}_{=w_{i,j} \sigma_{ij}} d\Omega + \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \sum_{i=1}^{n_{sd}} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i k_i d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} w_i(\sigma_{ij,j} + f_i) d\Omega - \sum_{i=1}^{n_{sd}} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i(\sigma_{ij} n_j - k_i) d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Положим

$$\alpha_i = \sigma_{ij,j} + f_i$$

$$\beta_i = \sigma_{ij}n_j - k_i.$$

Теперь осталось доказать, что

$$\alpha_i|_{\Omega} = 0,$$

$$\beta_i|_{\Gamma_{k_i}} = 0.$$

Доказательство этих тождеств аналогично доказательству подобных соотношений и предыдущей главы.

Пусть $w_i = \alpha_i \phi$, где

$$1) \phi|_{\Omega} > 0.$$

$$2) \phi|_{\Gamma} = 0.$$

3) ϕ — гладкая функция.

Тогда $w_i \in \mathcal{V}_i$. Подставим w_i в уравнение (2.67) и получим

$$0 = \int_{\Omega} \underbrace{\alpha_i^2}_{\geq 0} \underbrace{\phi}_{> 0} d\Omega.$$

Следовательно, $\alpha_i|_{\Omega} = 0$.

Пусть теперь $w_i = \delta_{i1}\beta_1\psi$, где

$$1') \psi|_{\Gamma_{k_i}} > 0.$$

$$2') \psi|_{\Gamma_{g_i}} = 0.$$

3') ψ — гладкая функция.

Снова $w_i \in \mathcal{V}_i$. Опять подставим w_i в уравнение (2.67) и получим (учитывая, что $\alpha_i|_{\Omega} = 0$)

$$0 = \int_{\Gamma_{k_i}} \beta_1^2 \psi d\Gamma.$$

Следовательно, $\beta_1|_{\Gamma_{k_i}} = 0$. Аналогично можно доказать, что $\beta_j|_{\Gamma_{k_i}} = 0$, $j = 2, \dots, n_{sd}$.

Таким образом, u_i — решение (S).

□

Снова можно ввести вспомогательные обозначения

$$a(\overline{w}, \overline{u}) = \int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} u_{(k,l)} d\Omega \quad (2.68)$$

$$(\bar{w}, \bar{f}) = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega \quad (2.69)$$

$$(\bar{w}, \bar{k})_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n_{sd}} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i k_i d\Gamma. \quad (2.70)$$

2.7.1 Задача

Доказать, что формы $a(\cdot, \cdot)$, (\cdot, \cdot) , $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ — симметричные билинейные формы.

2.7.2 Операторная форма записи уравнений

Пусть $\mathcal{S} = \{\bar{u} | u_i \in \mathcal{S}_i\}$ и $\mathcal{V} = \{\bar{w} | w_i \in \mathcal{V}_i\}$. Тогда можно переписать слабую постановку задачи в операторной форме

$$(W) \begin{cases} \text{По данным функциям } \bar{f}, \bar{g}, \bar{k} \\ \text{найти такую функцию } \bar{u} \in \mathcal{S}, \text{ что для любой } \bar{w} \in \mathcal{V} \\ a(\bar{w}, \bar{u}) = (\bar{w}, \bar{f}) + (\bar{w}, \bar{k})_{\Gamma}. \end{cases} \quad (2.71)$$

Представляется желательным построить безиндексную запись для правых частей тождеств (2.68)-(2.70). Пусть для определенности $n_{sd} = 2$.

Положим

$$\epsilon(\bar{u}) = (\epsilon_I(\bar{u})) = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$\epsilon(\bar{w}) = (\epsilon_I(\bar{w})) = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,2} \\ w_{1,2} + w_{2,1} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$$D = (D_{IJ}) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

где $D_{IJ} = c_{ijkl}$, а индексы согласованы в соответствии с таблицей

$I \backslash J$	$i \backslash k$	$j \backslash l$
1	1	1
3	1	2
3	2	1
2	2	2

Таким образом, мы “схлопываем” пары индексов $(i, j$ и $k, l)$, учитывая симметрии c_{ijkl} , $u_{(k,l)}$, $w_{(i,j)}$. Заметим, что в данном примере I, J принимают значения 1, 2, 3. В случае размерности n_{sd} индексы I, J будут пробегать значения $1, 2, \dots, n_{sd} \frac{n_{sd}+1}{2}$.

Можно доказать, что

$$w_{(i,j)} c_{ijkl} u_{(k,l)} = (\epsilon(\bar{w}))^T D \epsilon(\bar{u}), \quad (2.75)$$

следовательно,

$$a(\bar{w}, \bar{u}) = \int_{\Omega} (\epsilon(\bar{w}))^T D \epsilon(\bar{u}) d\Omega. \quad (2.76)$$

2.7.3 Задачи

1. Доказать (2.75) для $n_{sd} = 2$.
2. Построить аналог приведенной выше таблицы индексов для $n_{sd} = 3$. Пусть для определенности порядка

$$\epsilon(\bar{u}) = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

3. Доказать, что

$$\sigma = D \epsilon(\bar{u}), \quad (2.78)$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad n_{sd} = 2 \quad (2.79)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad n_{sd} = 3. \quad (2.80)$$

4. Пусть исследуемое тело изотропно, тогда

$$c_{ijkl}(x) = \mu(x)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda(x)\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (2.81)$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе; μ иногда также называют модулем разрыва и обозначают G . Выражение λ, μ через модуль Юнга E и отношение Пуассона ν задано тождествами

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.82)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.83)$$

Вывести из (2.81) вид D для $n_{sd} = 2, n_{sd} = 3$.

Указание к решению: Для $n_{sd} = 2$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

5. Пусть $\sigma_{in} = \sigma_{ij}n_j$ — разрывная функция. Обозначим скачок данной функции через $[\sigma_{in}]$. Пусть также функции w_i, u_i гладкие внутри элементов, но на границе их градиенты претерпевают разрыв первого рода. Доказать, что

$$0 = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} w_i(\sigma_{ij,j} + f_i) d\Omega - \sum_{i=1}^{n_{sd}} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i(\sigma_{in} - k_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_{int}} w_i[\sigma_{in}] d\Gamma.$$

Отсюда получим условия Эйлера-Лагранжа.

- I. $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ на $\bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e$.
- II. $\sigma_{in} = k_i$ на Γ_{k_i} .
- III. $[\sigma_{in}] = 0$ на Γ_{int} .

2.8 Линейная теория упругости. Постановка задачи Галеркина

Пусть, как обычно, \mathcal{S}^h и \mathcal{V}^h — конечномерные аппроксимации пространств \mathcal{S} и \mathcal{V} , соответственно. Мы считаем, что элементы $\bar{w}^h \in \mathcal{V}^h$ удовлетворяют или приближают граничные условия $w_i = 0$ на Γ_{g_i} , а элементы \mathcal{S}^h допускают разложение

$$\bar{u}^h = \bar{v}^h + \bar{g}^h, \quad (2.85)$$

где $\bar{v}^h + \bar{g}^h$ удовлетворяют или приближают граничные условия $u_i = g_i$ на Γ_{g_i} .

Тогда постановка задачи Галеркина приобретает следующий вид:

$$(G) \begin{cases} \text{По данным функциям } \bar{f}, \bar{g}, \bar{k} \text{ найти такую функцию} \\ \bar{u}^h = \bar{v}^h + \bar{g}^h \in \mathcal{S}^h, \text{ что для любой } \bar{w}^h \in \mathcal{V}^h \\ a(\bar{w}^h, \bar{v}^h) = (\bar{w}^h, \bar{f}) + (\bar{w}^h, \bar{k})_\Gamma - a(\bar{w}^h, \bar{g}^h). \end{cases} \quad (2.86)$$

Для того, чтобы определить глобальную матрицу жесткости нам потребуется массив ID . Для того, чтобы описать наиболее общую ситуацию, нам также будет необходима величина n_{dof} — число степеней свободы для узла.

Тогда

$$ID(i, A) = \begin{cases} P, & A \in \eta \setminus \eta_g \\ 0, & A \in \eta_g. \end{cases} \quad (2.87)$$

Здесь $i = 1, \dots, n_{dof}$ — номер степени свободы, A — глобальный номер узла, P — глобальный номер уравнения. Массив ID имеет размерность $n_{dof} \times n_{np}$.

Напомним, что $\eta = \{1, \dots, n_{np}\}$ — глобальная нумерация узлов. Пусть $\eta_{g_i} \subset \eta$ — множество тех узлов, в которых $u_i^h = g_i$. Значит, в каждом узле из множества $\eta \setminus \eta_{g_i}$ значение u_i^h необходимо определить.

Приведем теперь выражения для v_i^h и g_i^h через базисные функции и значения в узлах.

$$v_i^h = \sum_{A \in \eta \setminus \eta_{g_i}} N_A d_{iA}, \quad (2.88)$$

$$g_i^h = \sum_{A \in \eta_{g_i}} N_A g_{iA}, \quad (2.89)$$

Здесь опять $i = 1, \dots, n_{dof}$ — номер степени свободы, A — глобальный номер узла.

Пусть e_i — i -й базисный вектор пространства $\mathbb{R}^{n_{sd}}$. Тогда

$$\bar{v}^h = v_i^h e_i \quad (2.90)$$

$$\bar{g}^h = g_i^h e_i. \quad (2.91)$$

Аналогично для любого элемента $\bar{w}^h \in \mathcal{V}^h$ получаем представления

$$\bar{w}^h = w_i^h e_i, \quad w_i^h = \sum_{A \in \eta \setminus \eta_{g_i}} N_A w_{iA} \quad (2.92)$$

Подставим (2.90)-(2.92) в (2.86) и получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_{dof}} \sum_{B \in \eta \setminus \eta_{g_i}} a(N_A e_i, N_B e_j) d_{jB} = (N_A e_i, \bar{f}) + (N_A e_i, \bar{k})_{\Gamma} - \\ & - \sum_{j=1}^{n_{dof}} \sum_{B \in \eta \setminus \eta_{g_i}} a(N_A e_i, N_B e_j) g_{jB}, \quad A \in \eta \setminus \eta_{g_i}, \quad i = 1, \dots, n_{sd}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Последнее тождество эквивалентно матричному уравнению

$$K \bar{d} = \bar{F}, \quad (2.94)$$

где

$$K = (K_{PQ}) \quad (2.95)$$

$$\bar{d} = (d_P) \quad (2.96)$$

$$\bar{F} = (F_P) \quad (2.97)$$

$$K_{PQ} = a(N_A e_i, N_B e_j) \quad (2.98)$$

$$F_P = (N_A e_i, \bar{f}) + (N_A e_i, \bar{k})_\Gamma - \sum_{j=1}^{n_{dof}} \sum_{B \in \eta \setminus \eta_{g_i}} a(N_A e_i, N_B e_j) g_{jB}. \quad (2.99)$$

Здесь

$$P = ID(i, A), \quad Q = ID(j, B). \quad (2.100)$$

Выражение (2.98) можно написать в более явной форме с использованием тензоров ϵ , B и D . Заметим еще, что

$$\epsilon(N_A e_i) = B_A e_i, \quad (2.101)$$

где при $n_{sd} = 2$

$$B_A = \begin{pmatrix} N_{A,1} & 0 \\ 0 & N_{A,2} \\ N_{A,2} & N_{A,1} \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

а при $n_{sd} = 3$

$$B_A = \begin{pmatrix} N_{A,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{A,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{A,3} \\ 0 & N_{A,3} & N_{A,2} \\ N_{A,3} & 0 & N_{A,1} \\ N_{A,2} & N_{A,1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.103)$$

2.8.1 Задача

Проверить формулы (2.101)-(2.103).

2.8.2 Операторная запись задачи Галеркина

При использовании приведенных выше обозначений получим

$$K_{PQ} = e_i^T \int_{\Omega} B_A^T D B_B d\Omega e_j \quad (2.104)$$

Выражение (2.99) также можно переписать, поскольку

$$(N_A e_i, \bar{f}) = \int_{\Omega} N_A f_i d\Omega, \quad (2.105)$$

аналогично

$$(N_A e_i, \bar{k})_{\Gamma} = \int_{\Gamma} N_A k_i d\Gamma. \quad (2.106)$$

Следовательно

$$F_P = \int_{\Omega} N_A f_i d\Omega + \int_{\Gamma} N_A k_i d\Gamma - \sum_{j=1}^{n_{dof}} \sum_{B \in \eta \setminus \eta_{g_i}} a(N_A e_i, N_B e_j) g_{jB}. \quad (2.107)$$

Исследуем теперь свойства матрицы K

Пусть $n_{sd} = 2$ или 3 , $\bar{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{sd}}$. Если $w_{i,j} = 0$ (нулевые нагрузки) то \bar{w} допускает представления

$$(n_{sd} = 2), \bar{w}(\bar{x}) = \underbrace{\bar{c}}_{\text{сдвиг}} + \underbrace{c_3(x_1 e_2 - x_2 e_1)}_{\text{поворот}} \quad (2.108)$$

$$(n_{sd} = 3), \bar{w}(\bar{x}) = \underbrace{\bar{c}_1}_{\text{сдвиг}} + \underbrace{\bar{c}_2 \times \bar{x}}_{\text{поворот}}. \quad (2.109)$$

Здесь

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \bar{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{pmatrix}, \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.110)$$

Уравнения (2.98) и (2.99) — уравнения инфинитезимальных движений тела.

Условие R. Предположим, что однородные граничные условия, определяющие \mathcal{V}^h исключают нетривиальные инфинитезимальные движения тела. То есть, если $\bar{w}^h \in \mathcal{V}^h$ — инфинитезимальное движение, то $\bar{w}^h = 0$.

Теорема 10. 1. Матрица K симметрична.

2. Матрица K положительно определена.

Доказательство. 1. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
K_{PQ} &= e_i^T \int_{\Omega} B_A^T D B_B d\Omega e_j = \\
&= e_j^T \int_{\Omega} B_B^T D^T B_A d\Omega e_i = \\
&= e_j^T \int_{\Omega} B_B^T D B_A d\Omega e_i = \\
&= K_{QP}.
\end{aligned}$$

2. Пусть $w_i^h = \sum_{A \in \eta \setminus \eta_{g_i}} N_A c_{iA}$ принадлежит пространству \mathcal{V}_i^h .

Тогда $c_P = c_{iA}$ ($P = ID(i, A)$, $P = 1, \dots, n_{eq}$) — координаты n_{eq} -мерного вектора \bar{c} .

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\bar{c}^T K \bar{c} &= \sum_{P, Q=1}^{n_{eq}} c_P K_{PQ} c_Q = \\
&= \sum_{i, j=1}^{n_{dof}} \sum_{A, B \in \eta \setminus \eta_{g_i}} c_{iA} a(N_A e_i, N_B e_j) c_{jB} = \\
&= a\left(\sum_{i=1}^{n_{dof}} \sum_{A \in \eta \setminus \eta_{g_i}} c_{iA} N_A e_i, \sum_{j=1}^{n_{dof}} \sum_{B \in \eta \setminus \eta_{g_i}} c_{jB} N_B e_j\right) = \\
&= a(\bar{w}^h, \bar{w}^h) = \\
&= \int_{\Omega} \underbrace{w_{(i,j)}^h c_{ijkl} w_{(k,l)}^h}_{\geq 0} d\Omega \geq 0.
\end{aligned}$$

Пусть $\bar{c}^T K \bar{c} = 0$. Тогда

$$w_{(i,j)}^h c_{ijkl} w_{(k,l)}^h = 0.$$

Следовательно, $w_{(i,j)}^h = 0$, то есть \bar{w}^h — инфинитезимальное движение. По предположению $R \bar{w}^h = 0$. Таким образом, $c_P = 0$, а значит и $\bar{c} = 0$.

□

2.9 Линейная теория упругости. Матрица жесткости и вектор сил

Как обычно, представим матрицу K и вектор \bar{F} как сумму вкладов от каждого конечного элемента. При этом выражения для локальных тензоров приведены ниже

$$k^e = (k_{pq}^e), \bar{f}^e = (f_p^e), p, q = 1, \dots, n_{ee} = n_{ed}n_{en}, \quad (2.111)$$

$$k_{pq}^e = e_i^T \int_{\Omega^e} B_a^T D B_b d\Omega e_j, p = n_{ed}(a-1) + i, q = n_{ed}(b-1) + j, \quad (2.112)$$

$$(n_{sd} = 2) B_a = \begin{pmatrix} N_{a,1} & 0 \\ 0 & N_{a,2} \\ N_{a,2} & N_{a,1} \end{pmatrix}, \quad (2.113)$$

$$(n_{sd} = 3) B_a = \begin{pmatrix} N_{a,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,3} \\ 0 & N_{a,3} & N_{a,2} \\ N_{a,3} & 0 & N_{a,1} \\ N_{a,2} & N_{a,1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.114)$$

и

$$f_p^e = \int_{\Omega^e} N_a f_i d\Omega + \int_{\Gamma_{k_i}^e} N_a k_i d\Gamma - \sum_{q=1}^{n_{ee}} k_{pq} g_q^e, \Gamma_{k_i}^e = \Gamma^e \cap \Gamma_{k_i}. \quad (2.115)$$

Здесь n_{ee} — число уравнений для элемента, n_{ed} — число степеней свободы для каждого узла данного элемента. На практике иногда $n_{ed} < n_{dof}$.

Определим узловую подматрицу

$$\underbrace{k_{ab}^e}_{n_{ed} \times n_{ed}} = \int_{\Omega^e} B_a^T D B_b d\Omega. \quad (2.116)$$

Из (2.112) видно, что

$$k_{pq}^e = e_i^T k_{ab}^e e_j. \quad (2.117)$$

Тождества (2.111)-(2.114) дают возможность представить

$$k^e = \int_{\Omega^e} B^T D B d\Omega, \quad (2.118)$$

где

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_{n_{en}}). \quad (2.119)$$

Например, в двумерном случае $n_{sd} = n_{ed} = 2$ для четырехузлового элемента получим

$$\underbrace{k^e}_{8 \times 8} = \begin{pmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e \\ k_{12}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e \\ k_{13}^e & k_{23}^e & k_{33}^e & k_{34}^e \\ k_{14}^e & k_{24}^e & k_{34}^e & k_{44}^e \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

2.9.1 Задача

Пусть

$$\underbrace{\bar{d}^e}_{n_{ee} \times 1} = (\bar{d}_a^e) = \begin{pmatrix} \bar{d}_1^e \\ \bar{d}_2^e \\ \vdots \\ \bar{d}_{n_{en}}^e \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

$$(n_{ed} = 2) \bar{d}_a^e = \begin{pmatrix} d_{1a}^e \\ d_{2a}^e \end{pmatrix}, \quad (2.122)$$

$$(n_{ed} = 3) \bar{d}_a^e = \begin{pmatrix} d_{1a}^e \\ d_{2a}^e \\ d_{3a}^e \end{pmatrix}, \quad (2.123)$$

где

$$d_{ia}^e = u_i^h(x_a^e) \quad (2.124)$$

Вектор \bar{d}^e называется вектором смещений для элемента. Доказать, что вектор напряжений в точке $\bar{x} \in \Omega$ можно найти по формуле

$$\sigma(\bar{x}) = D(\bar{x})B(\bar{x})\bar{d}^e = D(\bar{x}) \sum_{a=1}^{n_{en}} B_a(\bar{x})\bar{d}_a^e. \quad (2.125)$$

2.10 Линейная теория упругости. Массивы ID , IEN , LM

При том, что нам потребуется обобщить определения массивов ID и LM , массив IEN ничем не отличается от аналогичного массива, введенного ранее для уравнения теплопроводности.

В данном и наиболее общем случае, массив LM трехмерен, с размерностями $n_{ed} \times n_{en} \times n_{el}$ и определен по формуле

$$LM(i, a, e) = ID(i, IEN(a, e)), \quad (2.126)$$

где i — номер степени свободы, a — локальный номер узла, e — номер элемента.

Иначе, можно считать, что массив LM двумерен с размерностями $n_{ee} \times n_{el}$. Тогда

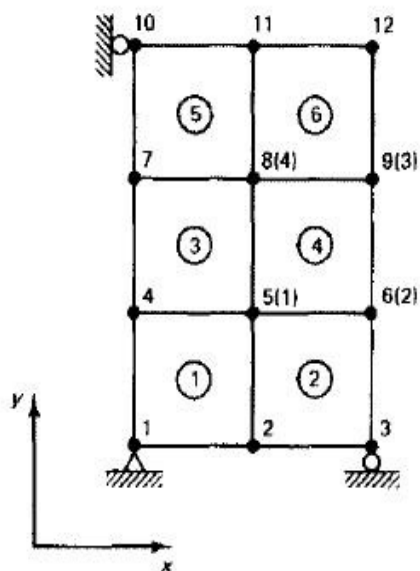
$$LM(p, e) = LM(i, a, e), \quad (2.127)$$

где p — локальный номер уравнения, e — номер элемента.

2.10.1 Примеры

Пример 1

Рассмотрим разбиение области на прямоугольные конечные элементы. Пронумеруем узлы каждого элемента (локальная нумерация) начиная с левого нижнего угла против часовой стрелки.



- Номера элементов
- () Локальные номера узлов
- Узлы, в которых заданы вертикальные смещения
- Узлы, в которых заданы горизонтальные смещения
- △ Неподвижная точка

Дадим точное описание g_p^e в терминах массивов IEN , LM .

$$g_p^e = g_{ia}^e = \begin{cases} 0 & \text{если } LM(i, a, e) \neq 0 \\ g_{iA}, & \text{где } A = IEN(a, e) \text{ если } LM(i, a, e) = 0. \end{cases} \quad (2.128)$$

Тогда массив ID имеет для $P = ID(i, A)$ вид

		Глобальные номера узлов (A)												$(n_{np} = 12)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Глобальные степени свободы (i)	1	0*	1	3	4	6	8	10	12	14	0	17	19	$(n_{eq} = 20)$
	2	0	2	0	5	7	9	11	13	15	16	18	20	

Массив IEN , в свою очередь, представляется матрицей

		Номера элементов (e)						
		1	2	3	4	5	6	($n_{ed} = 6$)
Локальные номера узлов (a)	1	1	2	4	5	7	8	
	2	2	3	5	6	8	9	
	3	5	6	8	9	11	12	
	4	4	5	7	8	10	11	

($n_{en} = 4$)

Массив LM

		Номера элементов (e)						
		1	2	3	4	5	6	($n_{ed} = 6$)
Локальные номера уравнений (p)	1	1	0	1	4	6	10	12
		2	0	2	5	7	11	13
	2	1	1	3	6	8	12	14
		2	2	0	7	9	13	15
	3	1	6	8	12	14	17	19
		2	7	9	13	15	18	20
	4	1	4	6	10	12	0	17
		2	5	7	11	13	16	18

($n_{ee} = 8$)

Номера степеней свободы элементов (i , здесь $1 \leq i \leq n_{ed}$, где $n_{ed} = 2$)

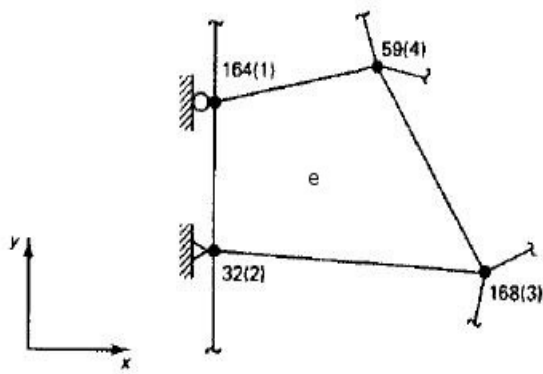
Локальные номера узлов (a)

Локальные номера уравнений ($p = n_{ed}(a - 1) + i$)

Здесь $P = LM(p, e) = LM(i, a, e) = ID(i, IEN(a, e))$.

Пример 2

Рассмотрим стандартный конечный элемент с 4 узлами внутри некоторого достаточно большого разбиения.



{ } – Локальные номера узлов

Пусть элементы массива ID определены следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} ID(1, 32) = 0 \\ ID(2, 32) = 0 \\ ID(1, 59) = 115 \\ ID(2, 59) = 116 \\ ID(1, 164) = 0 \\ ID(2, 164) = 325 \\ ID(1, 168) = 332 \\ ID(2, 168) = 333 \end{array} \right. \quad (2.129)$$

Следовательно, элементами массива IEN будут

$$\left\{ \begin{array}{l} IEN(1, e) = 164 \\ IEN(2, e) = 32 \\ IEN(3, e) = 168 \\ IEN(4, e) = 59 \end{array} \right. \quad (2.130)$$

Скомбинировав (2.129) и (2.130) получим элементы массива LM :

$$\left\{ \begin{array}{l} LM(1, 1, e) = 0 \\ LM(2, 1, e) = 325 \\ LM(1, 2, e) = 0 \\ LM(2, 2, e) = 0 \\ LM(1, 3, e) = 332 \\ LM(2, 3, e) = 333 \\ LM(1, 4, e) = 115 \\ LM(2, 4, e) = 116 \end{array} \right. \quad (2.131)$$

Соответственно, получаем вклады в глобальные тензоры.

Матрица жесткости:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{115,115} \leftarrow K_{115,115} + k_{77}^e \\ K_{115,116} \leftarrow K_{115,116} + k_{78}^e \\ K_{115,325} \leftarrow K_{115,325} + k_{72}^e \\ K_{115,332} \leftarrow K_{115,332} + k_{75}^e \\ K_{115,333} \leftarrow K_{115,333} + k_{76}^e \\ K_{116,116} \leftarrow K_{116,116} + k_{88}^e \\ K_{116,325} \leftarrow K_{116,325} + k_{82}^e \\ K_{116,332} \leftarrow K_{116,332} + k_{85}^e \\ K_{116,333} \leftarrow K_{116,333} + k_{86}^e \\ K_{325,325} \leftarrow K_{325,325} + k_{22}^e \\ K_{325,332} \leftarrow K_{325,332} + k_{25}^e \\ K_{325,333} \leftarrow K_{325,333} + k_{26}^e \\ K_{332,332} \leftarrow K_{332,332} + k_{55}^e \\ K_{332,333} \leftarrow K_{332,333} + k_{56}^e \\ K_{333,333} \leftarrow K_{333,333} + k_{66}^e \end{array} \right. \quad (2.132)$$

Вектор сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{115} \leftarrow F_{115} + f_7^e \\ F_{116} \leftarrow F_{116} + f_8^e \\ F_{325} \leftarrow F_{325} + f_2^e \\ F_{332} \leftarrow F_{332} + f_5^e \\ F_{333} \leftarrow F_{333} + f_6^e, \end{array} \right. \quad (2.133)$$

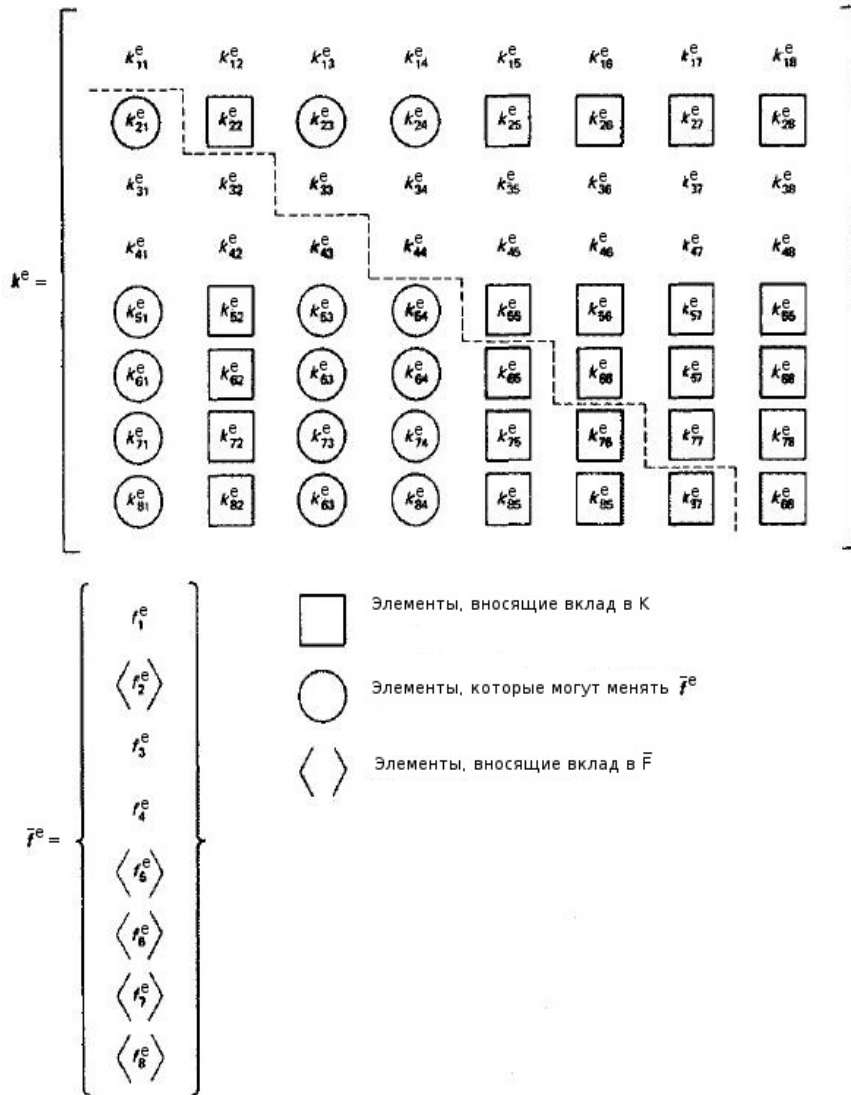
где

$$f_p^e = \dots - \sum_{q=1}^{n_{ee}} k_{pq}^e g_q^e. \quad (2.134)$$

В данном примере только g_1^e , g_3^e и g_4^e отличны от 0. Следовательно, можно упростить (2.134) до уравнения

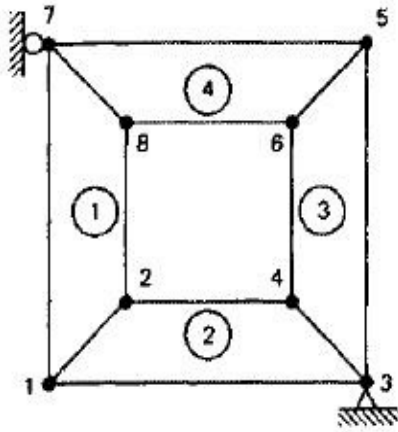
$$f_p^e = \dots - k_{p1}^e g_1^e - k_{p2}^e g_2^e - k_{p3}^e g_3^e - k_{p4}^e g_4^e. \quad (2.135)$$

Схема вкладов k^e , \bar{f}^e в K , \bar{F} :



2.10.2 Задача

Рассмотрим двумерную линейную задачу теории упругости. Построить массивы ID , IEN , LM для разбиения



2.11 Осесимметричные формулировки методов

Осесимметричные формулировки приводятся в терминах цилиндрической системы координат.

$x_1 = r$ — радиальная координата (расстояние до оси).

$x_2 = z$ — осевая координата (высота).

$x_3 = \phi$ — угловая координата.

Основное предположение — все рассматриваемые функции не зависят от ϕ .

2.11.1 Уравнение теплопроводности

Постановка задачи для осесимметричного случая практически совпадает с постановкой задачи для двумерной области. Единственное отличие — необходимо включить умножение на $2\pi r$ в каждое подинтегральное выражение для получения правильной формы объема, так как $d\Omega = 2\pi r dr dz$. Поскольку константа 2π везде одна и та же, при вычислениях ее часто опускают.

2.11.2 Уравнение теории упругости

Компонентами вектора смещений в цилиндрической системе координат будут

$u_1 = u_r$ — радиальное смещение.

$u_2 = u_z$ — осевое смещение.

$u_z = u_\phi$ — угловое смещение.

К основному предположению об осевой симметрии добавим $u_\phi = 0$. Тогда

$$\epsilon_{r\phi} = \epsilon_{z\phi} = 0. \quad (2.136)$$

Заметим, что $\epsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}$ и, следовательно, не равен 0. Также предположим, что

$$\sigma_{r\phi} = \sigma_{z\phi} = 0. \quad (2.137)$$

Эти предположения описывают так называемую осесимметричную задачу без кручения. Приведем ненулевые компоненты тензоров нагрузки и напряжения.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (2.138)$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

Нумерация индексов производится в соответствии с таблицей

$\begin{matrix} l \\ j \end{matrix}$	$\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}$	$\begin{matrix} j \\ l \end{matrix}$
1	1	1
3	1	2
3	2	1
2	2	2
4	3	3

Матрица D принимает вид

$$D = \underbrace{(D_{IJ})}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} D_{33} & D_3 \\ D_3^T & D_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.140)$$

Здесь

$$D_{33} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.141)$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} D_{14} \\ D_{24} \\ D_{34} \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

Кроме того, $D_{IJ} = c_{ijkl}$, где индексы определяются по таблице.

Матрица B_a , в свою очередь, определяется как

$$B_a = \begin{pmatrix} N_{a,1} & 0 \\ 0 & N_{a,2} \\ N_{a,2} & N_{a,1} \\ \frac{N_a}{r} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.143)$$

Снова необходимо включить умножение на $2\pi r$ в каждое подинтегральное выражение

Таким образом, плоский случай можно получить из осесимметричного применив следующие положения;

- 1) Игнорирование множителей $2\pi r$
- 2) Игнорируя последние столбец и строку матрицы D и последнюю строку матрицы B_a .

2.11.3 Задачи

Задача 1

Пусть тело изотропно. Доказать, что матрица D_{33} совпадает с матрицей (2.84). Доказать, что $D_{44} = \lambda + 2\mu$ и

$$D_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.144)$$

Задача 2

Рассмотрим одномерную задачу. Найти точные выражения для $\bar{f}^e = (f_a^e)$, $a = 1, 2$ для следующих случаев:

1) $\bar{F} = \text{const.}$

2) $\bar{F} = \delta_{x_0}(x)$, где $x_0 \in [x_1^e, x_2^e]$. Найти решение для $x_0 = x_2^e$, $x_0 = \frac{x_1^e + x_2^e}{2}$.

Решение:

$$f_a^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_a(x) \bar{F}(x) dx.$$

$$1) \cdot f_a^e = \bar{F} \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_a(x) dx = \frac{\bar{F} h^e}{2} \underbrace{\int_{-1}^1 N_a(\xi) d\xi}_{=1}.$$

$$\bar{f}^e = \frac{\bar{F} h^e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) f_a^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_a(x) \delta_{x_0}(x) dx = N_a(x_0).$$

Для $x_0 = x_2^e$

$$f_a^e = N_a(x_0) = N_a(x_2^e) = \delta_{ab}$$

$$\bar{f}^e = \begin{pmatrix} \delta_{1b} \\ \delta_{2b} \end{pmatrix}.$$

Для $x_0 = \frac{x_1^e + x_2^e}{2}$

$$f_a^e = N_a(x_0) = N_a\left(\frac{x_1^e + x_2^e}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

То есть

$$\bar{f}^e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3

Рассмотрим краевую задачу классической линейной теории упругости. В линеаризованной теории слабых смещений, наложенных на сильные, компонента, формирующая матрицу жесткости в вариационном уравнении

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} u_{(k,l)} d\Omega$$

заменяется на

$$\int_{\Omega} w_{i,j} d_{ijkl} u_{k,l} d\Omega,$$

где

$$\begin{aligned} d_{ijkl} &= c_{ijkl} + \delta_{ik} \sigma_{jl}^0, \\ \sigma_{jl}^0 &= \sigma_{jl}^0. \end{aligned}$$

При этом σ_{jl}^0 (исходные нагрузки) — некоторые известные функции $\bar{x} \in \Omega$. Симметричность c_{ijkl} и σ_{jl}^0 влечет

$$d_{ijkl} = d_{klij}$$

Пусть $n_{sd} = 2$. Тогда компонента, формирующая матрицу жесткости, в операторном виде задается уравнением

$$\int_{\Omega} \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,2} \\ w_{1,2} + w_{2,1} \\ w_{1,2} - w_{2,1} \end{pmatrix}^T \underbrace{D}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{1,2} - u_{2,1} \end{pmatrix} d\Omega,$$

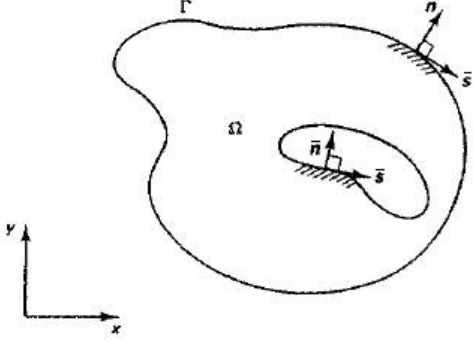
Это влечет следующую формулу для вычисления матрицы жесткости;

$$k_{pq}^e = e_i^T \int_{\Omega^e} \underbrace{B_a^T}_{2 \times 4} \underbrace{D}_{4 \times 4} \underbrace{B_b}_{4 \times 2} d\Omega e_j.$$

Выразить элементы B_a через базисные функции N_a . Найти выражения компонент D через d_{ijkl} .

Задача 4

Пусть Ω — область в \mathbb{R}^2 с границей $\Gamma = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4}$, где $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ — непересекающиеся подобласти Γ . Пусть \bar{s} — вектор касательный к Γ . Пусть \bar{n} — вектор нормали к Γ , образующий с \bar{s} правую пару векторов.



Рассмотрим следующую краевую задачу линейной теории упругости: По заданным $F_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $k_i : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$, g_n и $k_s : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$, и g_s и $k_n : \Gamma_4 \rightarrow \mathbb{R}$ найти такую функцию $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 \text{ на } \Omega \\ u_i &= g_i \text{ на } \Gamma_1 \\ \sigma_{ij}n_j &= k_i \text{ на } \Gamma_2 \\ \begin{cases} u_i n_i = g_n \\ \sigma_{ij}n_j s_i = k_s \end{cases} &\text{ на } \Gamma_3 \\ \begin{cases} u_i s_i = g_s \\ \sigma_{ij}n_j n_i = k_n \end{cases} &\text{ на } \Gamma_4 \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{(k,l)}$.

Найти слабую формулировку соответствующей задачи, все условия на пространства функций \mathcal{S} , \mathcal{V} .

Указание: $w = w_s \bar{s} + w_n \bar{n}$, то есть $w_i = w_s s_i + w_n n_i$.

Задача 5

При решении конкретных задач часто бывает полезно обобщить основное условие теории упругости и представить его в форме

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0) + \sigma_{ij}^0. \quad (2.145)$$

Здесь $\sigma_{ij}^0, \epsilon_{kl}^0$ — исходные нагрузка и напряжение, оба тензора — функции от \bar{x} . Исходное напряжение можно использовать для представления температурных эффектов расширения

$$\epsilon_{kl}^0 = \theta c_{kl}, \quad (2.146)$$

где θ — температура, а c_{kl} — коэффициенты расширения.

Очевидно, (2.145) не изменит матрицу жесткости. Тем не менее, появятся дополнительные слагаемые вектора сил. Найти эти слагаемые.

Решение: Начнем со слабой формулировки задачи

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_i F_i d\Omega + \sum_{i=1}^{sd} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i k_i d\Gamma.$$

Подставим (2.145), (2.146) в последнее выражение и получим

$$\underbrace{\int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} \epsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} w_i F_i d\Omega + \sum_{i=1}^{sd} \int_{\Gamma_{k_i}} w_i k_i d\Gamma +}_{\text{как и в стандартной ситуации}} \\ + \underbrace{\int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} \epsilon_{kl}^0 d\Omega - \int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij}^0 d\Omega}_{\text{новые слагаемые}}.$$

Следовательно, можно получить дополнительные слагаемые для f_p^e

$$f_p^e = \dots + e_i^T \int_{\Omega^e} B_a^T D \theta \bar{c} d\Omega - e_i^T \int_{\Omega^e} B_a^T \bar{\sigma}^0 d\Omega,$$

где

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \\ 2c_{12} \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{22}^0 \\ \sigma_{12}^0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6

Рассмотрим следующую краевую задачу;

$$u_{,xx} - p(p-1)x^{p-2} = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$u_{,x}(0) = 0$$

$$u(1) = 1,$$

где p — некоторая известная константа.

1) Найти точное решение уравнения.

2) Найти слабую формулировку задачи.

3) Найти формулировку Галеркина задачи.

4) Найти матричную формулировку задачи.

5) Решить задачу в матричной формулировке, полагая $p = 5$

и используя кусочно-линейные конечно-элементные пространства для случаев

а. Один элемент.

б. Два элемента равной длины.

6) Сравнить точное решение с приближенным, показать, почему значения $u_{,x}(1)$ и $u_{,x}^h(1)$ не могут совпадать.

Задача 7

При решении уравнения теплопроводности часто необходимо вычислить поток тепла через участок границы, на котором задана начальная температура. Пусть мы пользуемся стандартной схемой Галеркина для вычисления температуры. Вместо того, чтобы вычислять поток по стандартному способу (дифференцирование температуры) мы рассматриваем пост-обработку данных, получающуюся из следующей слабой постановки задачи:

Найти такие $u \in \mathcal{S}$ и $h \in L_2(\Gamma_g)$, что для любой $w \in \mathcal{V}$,

$$-\int_{\Omega} w_{,i} g_i d\Omega = \int_{\Omega} w \bar{F} d\Omega + \int_{\Gamma_k} w k d\Gamma + \int_{\Gamma_g} w h d\Gamma,$$

где h — неизвестный поток тепла на Γ_g .

1) Доказать, что помимо обычных дифференциальных уравнений и краевых условий появляется еще условие

$$h = -g_i n_i \text{ на } \Gamma_g.$$

2) Найти формулировки Галеркина и матричную, соответствующие данной слабой формулировке предполагая, что

$$h^h(x) = \sum_{A \in \eta_g} N_A(x) h_A$$

3) Найти аналогичную формулировку для одномерной задачи и найти поток тепла через 1.

4) Найти аналогичную формулировку для задачи теории упругости.

Глава 3

Изопараметрические элементы

3.1 Предварительные сведения

Естественно потребовать, чтобы приближенное решение сходилось к точному при измельчении разбиения. Соответственно нужно выбирать пространства базисных функций.

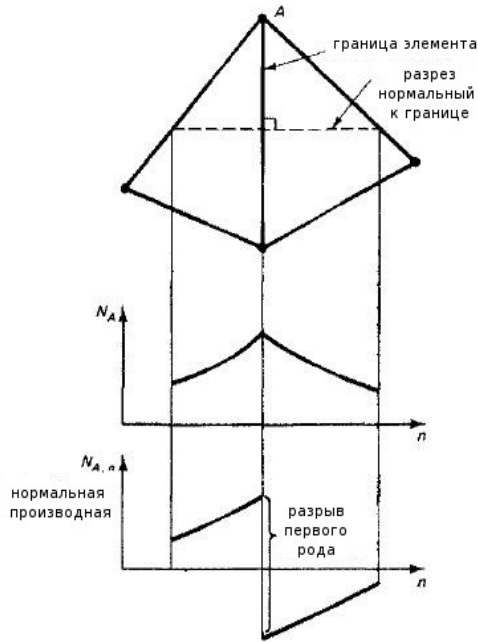
Основные формальные требования на сходимостъ для пространства базисных функций:

C1. Базисные функции гладкие внутри каждого элемента Ω^e .

C2. Непрерывны на границах элементов Γ^e .

C3. Множество таких функций полно.

При этом условия C1, C2 гарантируют, что первые производные функций имеют в худшем случае разрывы первого рода на границах элементов. Следовательно, все интегралы, необходимые для вычисления массивов, корректно определены, поскольку содержат в худшем случае, первые производные. При наличии разрывов у самих функций мы получим на границе δ -функции для производных и не сможем правильно вычислить соответствующие интегралы.



Базисные функции, удовлетворяющие условиям С1, С2 принадлежат классу $C^0(\bar{\Omega})$. Соответствующие элементы называются C^0 -элементами.

Теории, подобные теории Бернулли-Эйлера, которые требуют непрерывности производных старших порядков, порождают C^k -элементы.

3.1.1 Полнота

Для того, чтобы проиллюстрировать условие полноты, рассмотрим случай уравнения теплопроводности, для которого интерполяционная функция на элементе e имеет вид

$$u^h = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a^e, \quad (3.1)$$

где $d_a^e = u^h(x_a^e)$. Пусть $n_{sd} = 3$. Тогда говорят, что множество базисных функций полно, если

$$d_a^e = c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e \quad (3.2)$$

влечет

$$u^h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z, \quad (3.3)$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — произвольные константы. В двумерном случае мы просто опускаем слагаемые, содержащие z , в формулах (3.2), (3.3). То есть, полнота подразумевает, что интерполирующая функция для конечного элемента способна точно представить любой линейный по координатам полином.

В известном смысле это можно понимать, как приближение произвольной поверхности графика функции склейкой кусков плоскостей. То есть, метод конечных элементов — естественное обобщение приближений сплайнами на многомерные задачи.

Для задач теории упругости требования по сути такие же. В этом случае можно представить компоненты смещений в виде

$$u_i^h = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_{ia}^e, \quad (3.4)$$

где $d_{ia}^e = u_i^h(x_a^e)$. Семейство N_a полно, если

$$d_{ia}^e = c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e \quad (3.5)$$

влечет

$$u_i^h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z, \quad (3.6)$$

Заметим, что наличие свободных слагаемых в (3.6) говорит о том, что движения тела можно представить точно.

Пример

Кусочно-линейное пространство из главы 1 удовлетворяет условиям С1-С3. При этом С1, С2 следуют из определения. Докажем выполнение С3.

Пусть $d_a^e = c_0 + c_1 x_a^e$ и подставим эти выражения в $u^h = \sum_{a=1}^2 N_a d_a^e$. Тогда

$$u^h = \sum_{a=1}^2 N_a d_a^e =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a=1}^2 N_a(c_0 + c_1 x_a^e) = \\
&= c_0 \sum_{a=1}^2 N_a + c_1 \sum_{a=1}^2 N_a x_a^e
\end{aligned} \tag{3.7}$$

То есть, для доказательства полноты, достаточно проверить, что

$$\sum_{a=1}^2 N_a = 1 \tag{3.8}$$

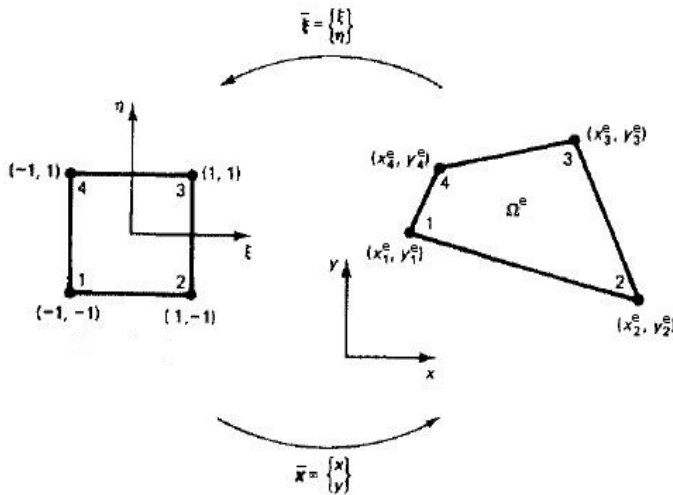
и

$$\sum_{a=1}^2 N_a x_a^e = x. \tag{3.9}$$

Напомним, что $N_a(\xi) = \frac{1+(-1)^a \xi_a}{2}$, отсюда сразу следует (3.7). Тождество (3.8) было доказано еще в первой главе.

3.2 Билинейный четырехугольный элемент

Область определения данного элемента полностью определяется расположением его вершин \bar{x}_a^e , $a = 1, 2, 3, 4$ на плоскости \mathbb{R}^2 . Полагаем, что узлы пронумерованы против часовой стрелки. Найдем преобразование координат, переводящее данный элемент в квадрат со стороной 2. Этот квадрат иногда называют базовой областью определения.



Нужно построить отображение, сопоставляющее вектору в квадрате

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

вектор из Ω^e

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

преобразованиями вида

$$x(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_a^e, \quad (3.12)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) y_a^e, \quad (3.13)$$

ξ, η иногда называют натуральными или естественными координатами.

Можно свернуть формулы (3.12), (3.13) в одну

$$\bar{x}(\bar{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\bar{\xi}) \bar{x}_a^e. \quad (3.14)$$

Определим функции N_a сначала предположив билинейность представлений

$$x(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta, \quad (3.15)$$

$$y(\xi, \eta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta, \quad (3.16)$$

затем заставив (3.15), (3.16) удовлетворять условиям

$$x(\xi_a, \eta_a) = x_a^e \quad (3.17)$$

$$y(\xi_a, \eta_a) = y_a^e. \quad (3.18)$$

Здесь ξ_a, η_a определены в таблице

a	ξ_a	η_a
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Условия (3.17), (3.18) накладывают ограничения на N_a , а именно

$$N_a(\bar{\xi}_b) = \delta_{ab} \quad (3.19)$$

Для того, чтобы убедиться в этом, объединим формулы (3.12) и (3.17) и получим тождество

$$x_b^e = x(\xi_b, \eta_b) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi_b, \eta_b) x_a^e, \quad (3.20)$$

которое верно только при $N_a(\xi_b, \eta_b) = \delta_{ab}$. Такое же условие получается при комбинировании формул (3.13) и (3.18). То есть тождества (3.15)-(3.18) порождают матричную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{pmatrix} y_1^e \\ y_2^e \\ y_3^e \\ y_4^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Разрешим эти системы относительно α и β и подставив результаты в (3.15), (3.16), сравним полученные выражения с (3.12), (3.13) и получим

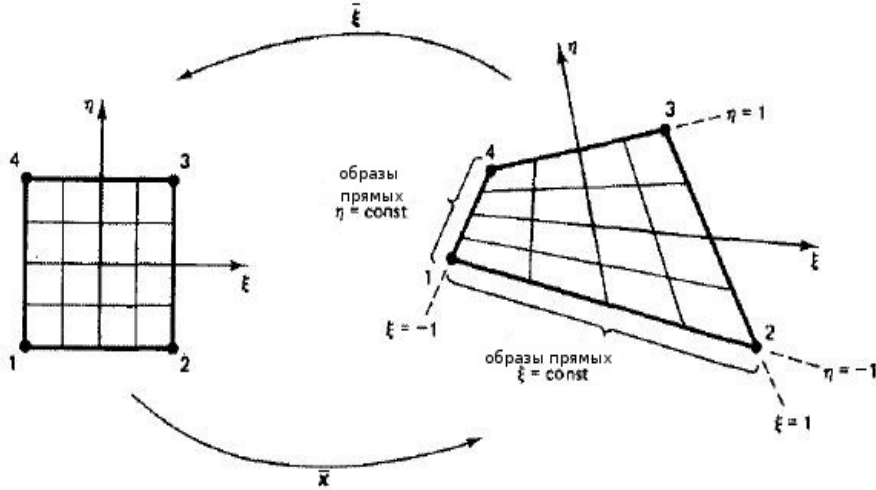
$$N_a(\bar{\xi}) = N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (3.23)$$

Заметим, что в правой части (3.23) стоит в точности произведение одномерных базисных функций.

Задача

Проверить (3.23).

Заметим, что координатная сетка в пространстве $\bar{\xi}$ переходит в координатную сетку пространства \bar{x} . В частности границы квадрата перейдет в границу элемента Ω^e .



Предположим теперь, что интерполирующие функции на каждом элементе заданы подобным образом.

Например, для уравнения теплопроводности

$$u^h(\bar{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\bar{\xi}) d_a^e, \quad (3.24)$$

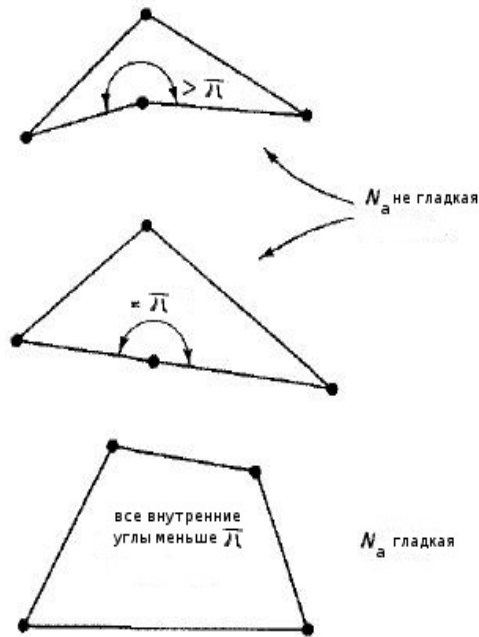
а для уравнения теории упругости

$$u_i^h(\bar{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\bar{\xi}) d_{ia}^e. \quad (3.25)$$

Таким образом, достаточно рассматривать только (3.24), поскольку в теории упругости каждая координата имеет вид (3.24).

Проверим теперь условия C1-C3.

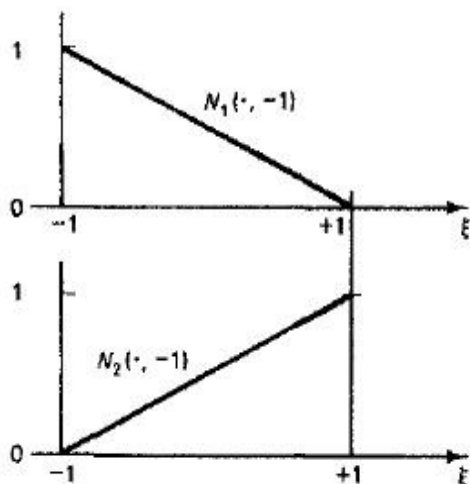
Условие C1, гладкость внутри Ω^e . Можно доказать, что N_a — гладкие функции от x, y если все внутренние углы, образованные смежными ребрами меньше π . Поскольку для проверки гладкости приходится рассматривать обратные функции, то есть $\xi(x, y), \eta(x, y)$, то при слишком сильно деформированном элементе, такие функции не будут гладкими.



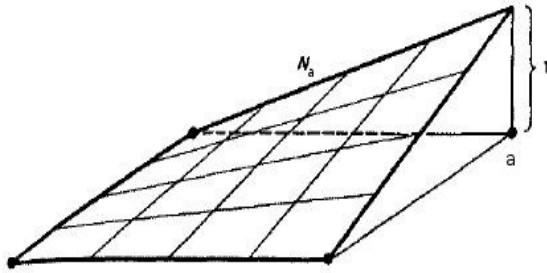
Условие С2, непрерывность на Γ^e . Рассмотрим стандартную базисную функцию N_a . Пусть $a = 1$ или 2 . Тогда поведение N_a при переходе через ребро, соединяющее узлы 1 и 2 можно изучить, подставив $\eta = -1$ в выражение (3.23). Получим

$$N_a(\xi, -1) = \frac{1 + \xi_a \xi}{2}, \quad a = 1, 2. \quad (3.26)$$

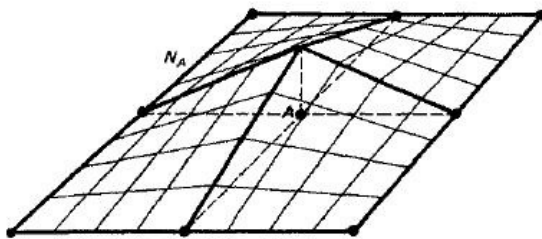
Из таблицы следует, что $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$. Тогда правая часть (3.26) — линейная базисная функция для одномерной теории. Поскольку выражение (3.26) типично для всех ребер элемента и в силу (3.19) заключаем, что графики N_a в ограничении на ребра имеют вид



Функция N_a представляет собой уравнение гиперболического параболоида.



Аналогичные рассуждения для смежных элементов показывают, что N_A непрерывна, ее график — “тент” с осью в A .



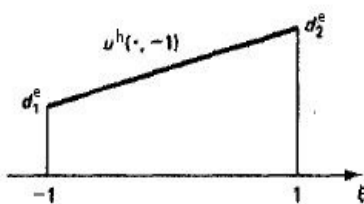
Следовательно, множество \mathcal{S}^h состоит только из непрерывных функций, поскольку каждый элемент пространства — линейная комбинация N_A . Этот же факт можно доказать из других соображений.

Рассмотрим поведение (3.24) на ребре, соединяющем x_1^e с x_2^e . В силу (3.26) это выражение можно представить в виде

$$u^h(\xi, -1) = \sum_{a=1}^2 \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) d_a^e. \quad (3.27)$$

Тогда верно следующее:

1. Поведение u^h на ребре $[x_1^e, x_2^e]$ определяется только значениями u^h в узлах x_1^e, x_2^e .
2. u^h линейна по ξ вдоль прообраза $[x_1^e, x_2^e]$.



Аналогичное заключение можно сделать относительно любого другого элемента того же типа, смежного $[x_1^e, x_2^e]$. То есть,

непрерывность u^h автоматически следует из пунктов 1, 2.

Условие C2, полнота.

$$\begin{aligned}
u^h &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a^e = \\
&= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a (c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e) = \\
&= c_0 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a + c_1 \underbrace{\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a x_a^e}_{=x \text{ по (3.17)}} + c_2 \underbrace{\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a y_a^e}_{=y \text{ по (3.18)}}.
\end{aligned}$$

Остается доказать, что базисные функции в сумме дают 1 для любой точки. Это можно доказать прямым вычислением

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) + \\
&+ \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) = \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.3 Изопараметрические элементы

Пусть \square — базовая область определения в пространстве с координатой $\bar{\xi}$.

Определение 1. Пусть отображение $\bar{x} : \square \rightarrow \bar{\Omega}^e$ имеет вид

$$\bar{x}(\bar{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\bar{\xi}) \bar{x}_a^e. \tag{3.29}$$

Если функцию u^h , приближающую точное решение можно представить в виде

$$u^h(\bar{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\bar{\xi}) d_a^e, \tag{3.30}$$

то элемент называется **изопараметрическим**.

Суть этого определения в том, что базисные функции, определяющие (3.29), определяют также и (3.30). Билинейный четырехугольник, определенный в предыдущем параграфе — пример изопараметрического элемента.

Докажем теперь, что в общем случае для изопараметрических элементов условие C1 выполняется.

3.3.1 Условие C1

Определение 2. *Отображение $\bar{x} : \square \rightarrow \bar{\Omega}^e \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ **взаимно-однозначно**, если для любой пары различных $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ $\bar{x}(\bar{\xi}_1) \neq \bar{x}(\bar{\xi}_2)$.*

Определение 3. *Отображение $\bar{x} : \square \rightarrow \bar{\Omega}^e \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ — **сюръекция**, если $\bar{\Omega}^e = \bar{x}(\square)$*

Определение 4. *Пусть $\bar{x} : \square \rightarrow \bar{\Omega}^e \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ — дифференцируемое отображение. Тогда существует определитель матрицы частных производных $j = \det(\frac{d\bar{x}}{d\bar{\xi}})$ — так называемый **якобиан** отображения \bar{x} .*

Следствием теоремы о неявной функции является тот факт, что если отображение \bar{x}

1. Взаимно-однозначно.
2. Сюръекция.
3. Принадлежит классу C^k , $k \geq 1$.
4. $j(\bar{\xi}) > 0$ для всех $\bar{\xi} \in \text{Box}$.

То обратное отображение $\bar{\xi} = \bar{x}^{-1} : \bar{\Omega}^e \rightarrow \square$ существует и также принадлежит классу C^k

Утверждение 1. *Пусть отображение, определенное по формуле (3.29) обладает свойствами 1-4, тогда условие C1 выполнено.*

Доказательство. По предположению $N_a = N_a(\bar{\xi})$ также функция класса C^1 . Тогда и $\bar{\xi} = \bar{\xi}(x)$ также класса C^1 . Следовательно, $N_a(\bar{x}) = N_a(\bar{\xi}(\bar{x}))$ — гладкая функция от \bar{x} □

На практике отображения $\bar{x} : \square \rightarrow \bar{\Omega}^e$ чаще всего обладают свойствами 1-4. Тем не менее существует одно важное для практических целей исключение. Оно связано с так называемым вырождением элементов, то есть операции склеивания узлов (треугольные и тетраэдральные элементы). При таком вырождении якобиан обращается в 0 в некоторых узлах элемента. Вне этих точек якобиан положителен и отображение $\bar{\xi}(\bar{x})$ остается гладким, то есть условие C1 верно.

При преальных вычислениях, производится проверка значений якобиана в серии пробных точек, если в этих точках якобиан отрицательный или нулевой, то вычисления прекращаются.

3.3.2 Условие C3

Утверждение 2. Если $\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a = 1$ то условие C3 выполнено для изопараметрических элементов.

Доказательство. Докажем утверждение в трехмерном случае.

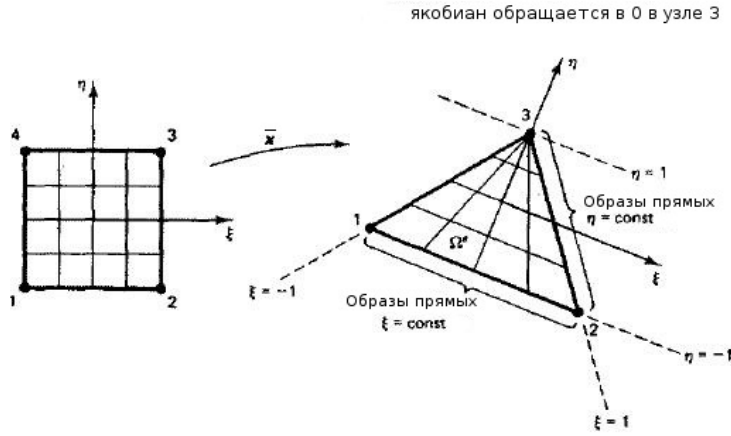
$$\begin{aligned}
 u^h &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a^e = \\
 &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a (c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e) = \\
 &= c_0 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a + c_1 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a x_a^e + c_2 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a y_a^e + c_3 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a z_a^e = \\
 &= c_0 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a + c_1 x + c_2 y + c_3 z
 \end{aligned}$$

Доказательство того, что $\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a = 1$ аналогично приведенному выше для двумерного случая. \square

Выполнение условия C2 можно проверить способом, подобным приведенному выше, в каждом конкретном случае.

3.4 Линеный треугольный элемент. Пример “вырождения”

Построим такой элемент склеив между собой узлы под номерами 3, 4.



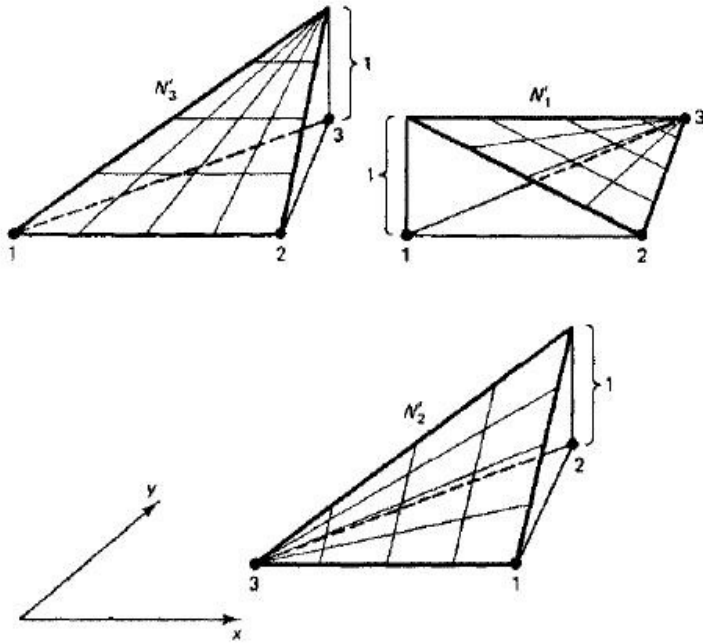
Мы полагаем $x_4^e = x_3^e$ в формуле (3.14) и определяем новые базисные функции для треугольника N'_a , $a = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{a=1}^4 N_a x_a^e = \\
 &= N_1 x_1^e + N_2 x_2^e + (N_3 + N_4) x_3^e = \sum_{a=1}^3 N'_a x_a^e. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

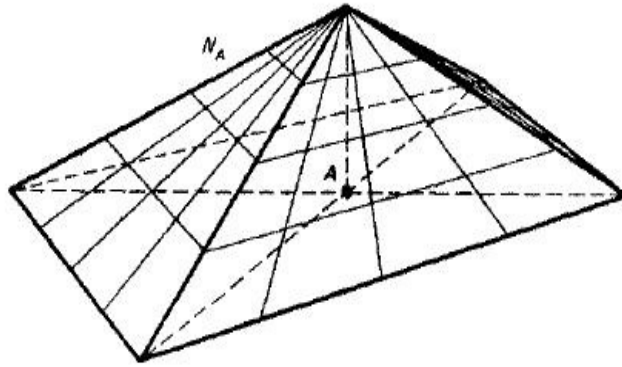
Здесь

$$N'_a = \begin{cases} N_a = \frac{1}{4}(1 + (-1)^a \xi)(1 - \eta), & a = 1, 2 \\ N_3 + N_4 = \frac{1}{2}(1 + \eta), & a = 3. \end{cases} \quad (3.32)$$

Графики локальных базисных функций



Типичный вид глобальной базисной функции



Условие непрерывности С2 можно извлечь из графика на последнем рисунке. Иногда, по очевидным причинам, такие функции называются пирамидами. Другой способ доказательства выполнения условия С2 можно получить рассматривая интерполяционные функции для элемента

$$u^h = \sum_{a=1}^3 N'_a d_a^e \quad (3.33)$$

вдоль ребер.

Тогда на стороне 1 – 2

$$u^h(\xi, -1) = \frac{1}{2}(1 - \xi)d_1^e + \frac{1}{2}(1 + \xi)d_2^e. \quad (3.34)$$

На стороне 2 – 3

$$u^h(1, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)d_2^e + \frac{1}{2}(1 + \eta)d_3^e. \quad (3.35)$$

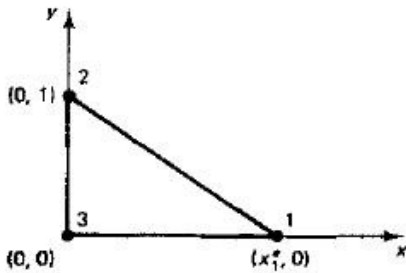
На стороне 3 – 1

$$u^h(-1, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)d_3^e + \frac{1}{2}(1 - \eta)d_1^e. \quad (3.36)$$

То есть, согласно (3.34)-(3.36), эти функции линейны на границе элемента. Поскольку это верно также и для всех элементов, смежных данному, непрерывность функций на границе очевидна. Также благодаря этому оказывается возможным рассматривать одновременно четырехугольные и треугольные элементы в одном разбиении.

Задача

Найти якобиан в точке $\xi = \eta = 0$ для элемента



Представить результат в виде графика функции от $x_1^e \in [-2, 2]$.

3.5 Трилинейный шестигранный (гексаэдральный) элемент

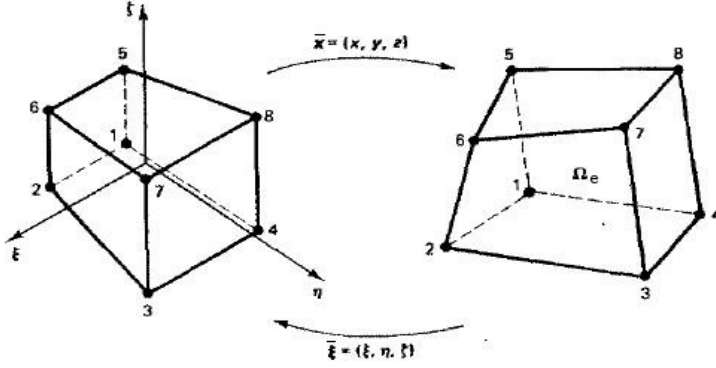
Для пространственных задач трехмерный шестигранный элемент — краеугольный камень всех конструкций. Область определения Ω^e — образ куба со стороной, равной 2 в пространстве с координатами $\bar{\xi}$ при действии трилинейного отображения

$$x(\bar{\xi}) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta + \alpha_4\xi\eta + \alpha_5\zeta\eta + \alpha_6\zeta\xi + \alpha_7\xi\eta\zeta, \quad (3.37)$$

с аналогичными представлениями для $y(\bar{\xi})$, $z(\bar{\xi})$.

Коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_7$ определим из условий

$$x(\bar{\xi}_a) = x_a^e, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (3.38)$$



Получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \\ x_5^e \\ x_6^e \\ x_7^e \\ x_8^e \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Координаты узлов в $\bar{\xi}$ -пространстве заданы таблицей

a	ξ_a	η_a	ζ_a
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

Разрешим систему (3.39) относительно α_j и получим

$$x(\bar{\xi}) = \sum_{a=1}^8 N_a(\bar{\xi}) x_a^e, \quad (3.40)$$

где

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)(1 + \zeta_a \zeta), \quad (3.41)$$

с аналогичными представлениями для $y(\bar{\xi})$, $z(\bar{\xi})$. Снова, как и в плоском случае правая сторона (3.41) — произведение одномерных базисных функций.

Определим u^h с использованием концепции изопараметрических элементов.

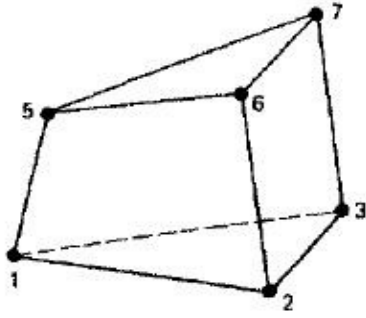
$$u^h(\bar{\xi}) = \sum_{a=1}^8 \frac{1}{4} N_a(\bar{\xi}) d_a^e \quad (3.42)$$

Непрерывность этой функции при переходе через грани элемента следует из вида ограничений отображения на грань, например

$$u^h(\xi, \eta, -1) = \sum_{a=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) d_a^e \quad (3.43)$$

Из (3.43) видно, что на грани $\zeta = -1$ функция u^h есть функция, представляющая гиперболический параболоид, однозначно определяющаяся своими значениями в узлах. То же верно относительно любого другого элемента, смежного данной грани. Если область определения Ω^e не сильно деформирована, то базисные функции являются гладкими функциями от \bar{x} . Условие полноты удовлетворяется по построению изопараметрических элементов.

Шетигранник или “кирпич” — наиболее распространенная в моделировании задач форма. Тем не менее часто представляется удобным использовать клиновидные элементы. Техника вырождения параллелепипеда в клин аналогична технике вырождения квадрата в треугольник. А именно, мы склеиваем узлы 3 и 4, 7 и 8.



В этом случае представление (3.40) принимает следующий вид:

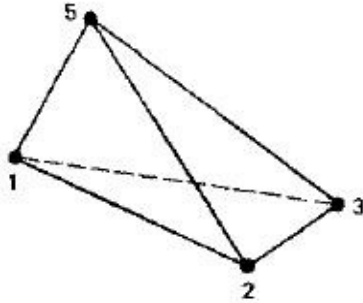
$$x = \sum_{a=1}^3 N'_a x_a^e + \sum_{a=5}^7 N'_a x_a^e, \quad (3.44)$$

где

$$N'_a = \begin{cases} N_a, & a = 1, 2, 5, 6 \\ N_a + N_{a+1}, & a = 3, 7. \end{cases} \quad (3.45)$$

Якобиан обращается в 0 вдоль ребра, соединяющего узлы 3 и 7, но производные по x от базисных функций непрерывны.

Дальнейшее склеивание узлов 5, 6, 7 порождает известный тетраэдральный элемент.



При этом выражение (3.44) снова преобразуется к виду

$$x = \sum_{a=1}^3 N'_a x_a^e + N''_5 x_5^e, \quad (3.46)$$

где

$$N''_5 = N'_5 + N'_6 + N'_7. \quad (3.47)$$

Можно доказать, что производные по x от базисных функций в этом случае постоянны.

3.6 Элементы высших порядков. Полиномы Лагранжа

В этом разделе рассматриваются элементы, которые не являются простым произведением линейных элементов. Следовательно, такие элементы позволяют более точно представлять решение и обеспечивают выполнение некоторых дополнительных условий. В то же время, использование данных функций более ресурсоемко, чем использование линейных.

Систематический вывод некоторых элементов высших порядков можно осуществить при помощи одномерных полиномов Лагранжа.

3.6.1 Полиномы Лагранжа

Полином Лагранжа определен тождеством

$$l_a^{n_{en}-1}(\xi) = \frac{\prod_{b=1, b \neq a}^{n_{en}} (\xi - \xi_b)}{\prod_{b=1, b \neq a}^{n_{en}} (\xi_a - \xi_b)}. \quad (3.48)$$

Здесь $n_{en} - 1$ — степень полинома, a — номер узла.

Легко видеть, что

$$l_a(\xi_b) = \delta_{ab} \quad (3.49)$$

Определим базисные функции одномерного элемента с n_{en} узлами соотношением

$$N_a = l_a^{n_{en}-1} \quad (3.50)$$

ξ_a , как и ранее, координаты узлов элемента. Тождество (3.49) обеспечивает выполнение интерполяционного свойства.

Пример 1

Рассмотрим двухузловой одномерный элемент из первой главы. Определим базисные функции по формуле (3.50). Тогда

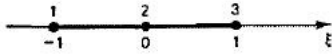
$$l_1^1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad (3.51)$$

$$l_2^1(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (3.52)$$

То есть, получили стандартные линейные одномерные элементы.

Пример 2

Воспользуемся формулой (3.50) для вывода базисных функций квадратичного трехузлового элемента. Пусть узлы расположены в точках с координатами $-1, 0, 1$ в пространстве $\bar{\xi}$.

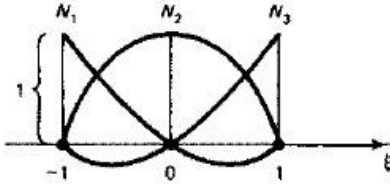


Тогда базисные функции есть

$$N_1(\xi) = l_1^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad (3.53)$$

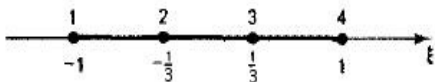
$$N_2(\xi) = l_2^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(1)(-1)} = 1 - \xi^2, \quad (3.54)$$

$$N_3(\xi) = l_3^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)} = \frac{\xi(\xi + 1)}{(1)(2)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1). \quad (3.55)$$



Задача 1

Применить (3.50) для построения базисных функций кубического четырехузлового элемента ($n_{en} = 4$).



Пример 3

Базисные функции для билинейного четырехугольника можно построить как произведения полиномов Лагранжа первого поряд-

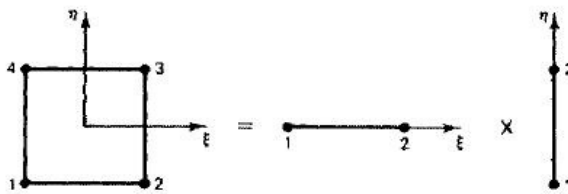
ка. Соответствующая формула:

$$N_a(\xi, \eta) = l_b^1(\xi)l_c^1(\eta). \quad (3.56)$$

Здесь индексы связаны друг с другом в соответствии с таблицей

a	b	c
1	1	1
2	2	1
3	2	2
4	1	2

Схематическое изображение процедуры:



Раскрывая формулы (3.56) получим

$$N_1(\xi, \eta) = l_1^1(\xi)l_1^1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.57)$$

$$N_2(\xi, \eta) = l_2^1(\xi)l_1^1(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.58)$$

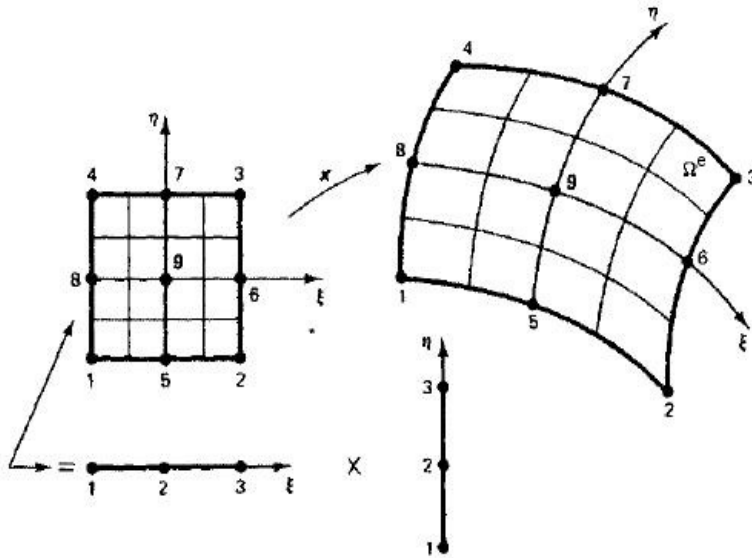
$$N_3(\xi, \eta) = l_2^1(\xi)l_2^1(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.59)$$

$$N_4(\xi, \eta) = l_1^1(\xi)l_2^1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.60)$$

Аналогично можно построить три-линейные трехмерные базисные функции.

Пример 4

Дву- и трех-мерные базисные функции высших порядков также можно построить используя полиномы Лагранжа. Например, можно предьявить конструкцию девятиузлового двумерного элемента Лагранжа. Базисные функции элемента – произведения квадратичных полиномов Лагранжа.



Заметим, что область Ω^e может иметь непрямую границу. Формула для базисных функций имеет вид

$$N_a(\xi, \eta) = l_b^2(\xi)l_c^2(\eta). \quad (3.61)$$

Здесь индексы связаны друг с другом в соответствии с таблицей

a	b	c
1	1	1
2	3	1
3	3	3
4	1	3
5	2	1
6	3	2
7	2	3
8	1	2
9	2	2

Типичными представителями семейства функций являются:

В угловом узле

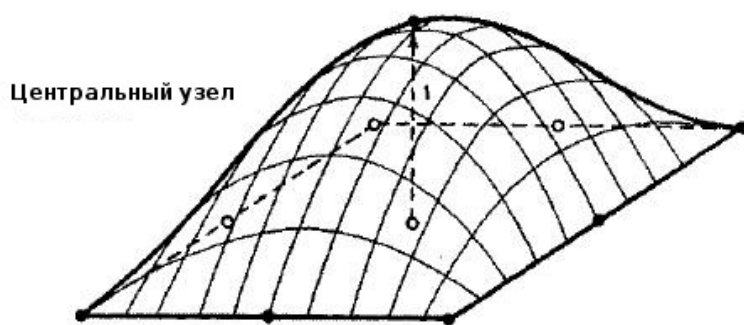
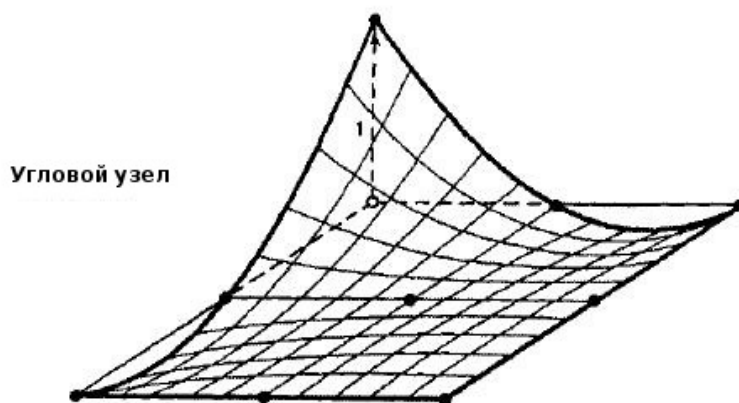
$$N_1(\xi, \eta) = l_1^2(\xi)l_1^2(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1). \quad (3.62)$$

В узле на середине стороны

$$N_5(\xi, \eta) = l_2^2(\xi)l_1^2(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(\eta - 1). \quad (3.63)$$

В центральном узле

$$N_9(\xi, \eta) = l_2^2(\xi)l_2^2(\eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2). \quad (3.64)$$



Определение 5. Элементы, для которых базисные функции — произведение полиномов Лагранжа называются **элементами Лагранжа**.

Задача 2

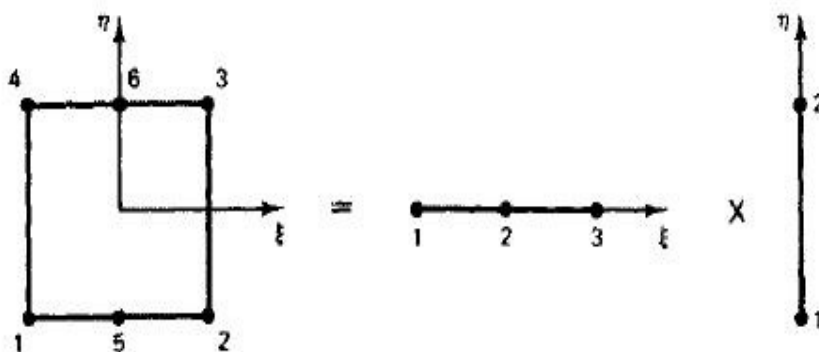
Использовать результаты Задачи 1 для построения 16-тиузлового двумерного элемента Лагранжа.

Задача 3

С помощью квадратичных одномерных базисных функций найти триквадратичные 27-миузловой трехмерный элемент.

Задача 4

С помощью линейных и квадратичных базисных функций найти базисные функции для четырехугольного шестиузлового элемента следующего вида:



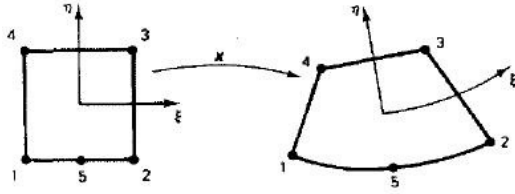
3.7 Элементы с переменным числом узлов

В этом разделе будут построены базисные функции для двумерного четырехугольного элемента, содержащего от 4 до 9 узлов. Если присутствуют все 9 узлов, то получим стандартный элемент Лагранжа из предыдущего параграфа. Если наличествуют только 4 узла, то опять получаем стандартные билинейные функции. Можно добавить или удалить любой из узлов с номером от 5 до 9.

Мы начинаем конструкцию со стандартных билинейных базисных функций для четырехузлового элемента.

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta), \quad a = 1, 2, 3, 4. \quad (3.65)$$

Добавим сначала узел 5, не исключая искривленности ребра и квадратичного поведения вдоль ребра, соединяющего узлы 1, 2.



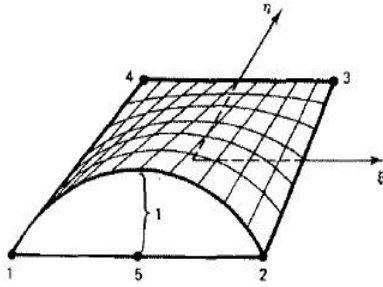
Заметим, что N_1, N_2 не обращаются в 0 в узле 5 ($N_a(\xi_5, \eta_5) = \frac{1}{2}, a = 1, 2$). Функции N_3, N_4 , напротив, равны нулю в пятом узле. Следовательно, функции N_1, N_2 необходимо изменить. Построим сначала базисную функцию для узла 5.

$$N_5(\xi, \eta) = \underbrace{l_2^2(\xi)}_{\substack{\text{квадратичный} \\ \text{полином Лагранжа} \\ \text{для среднего узла}}} \underbrace{l_1^1(\eta)}_{\substack{\text{линейный} \\ \text{полином Лагранжа} \\ \text{для левого узла}}} = \\ = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (3.66)$$

Заметим, что по построению

$$N_5(\xi_a, \eta_a) = \delta_{5a}, \quad a = 1, 2, \dots, 5. \quad (3.67)$$

График функции $N_5(\xi, \eta)$:



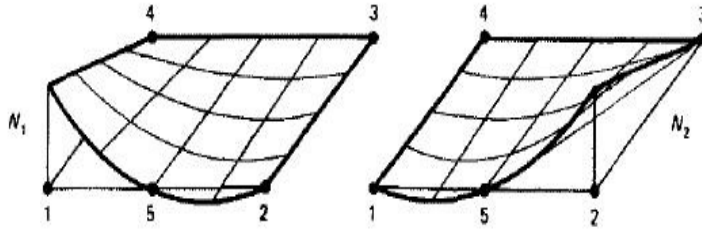
Применим теперь эту функцию для модификации N_1, N_2 . А именно, вычтем функцию, кратную N_5 из N_1, N_2 так, чтобы полученные в результате выражения обращались в 0 в узле 5. Тогда функции

$$N_a - \frac{1}{2}N_5, \quad a = 1, 2 \quad (3.68)$$

удовлетворяют нужным требованиям, то есть

$$N_a(\xi_b, \eta_b) - \frac{1}{2}N_5(\xi_b, \eta_b) = \delta_{a,b}, \quad a = 1, 2, \quad b = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3.69)$$

Графики модифицированных функций:



Таким образом, базисные функции для пятиузлового элемента заданы формулами (3.66), (3.68) и исходными функциями для узлов 1, 2. То есть, необходимо изменить только функции, определенные по узлам, смежным с нововведенным узлом 5. Аналогично можно добавить узлы в середины остальных ребер. Построим функции для этих узлов аналогично N_5 . Получим

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi), \quad (3.70)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (3.71)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi). \quad (3.72)$$

Если какие-либо из узлов 5, 6, 7 или 8 отсутствуют, приравняем соответствующие функции нулю. Тогда модифицированные функции для узлов 1, 2, 3, 4 принимают вид

$$N_1 \leftarrow N_1 - \frac{1}{2}(N_5 + N_8), \quad (3.73)$$

$$N_2 \leftarrow N_2 - \frac{1}{2}(N_5 + N_6), \quad (3.74)$$

$$N_3 \leftarrow N_3 - \frac{1}{2}(N_7 + N_6), \quad (3.75)$$

$$N_4 \leftarrow N_4 - \frac{1}{2}(N_7 + N_8). \quad (3.76)$$

При этом

$$N_a(\xi_b, \eta_b) = \delta_{ab} \quad (3.77)$$

Для того, чтобы ввести узел 9 необходимо добавить так называемую “функцию пузыря”

$$N_9(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi^2).. \quad (3.78)$$

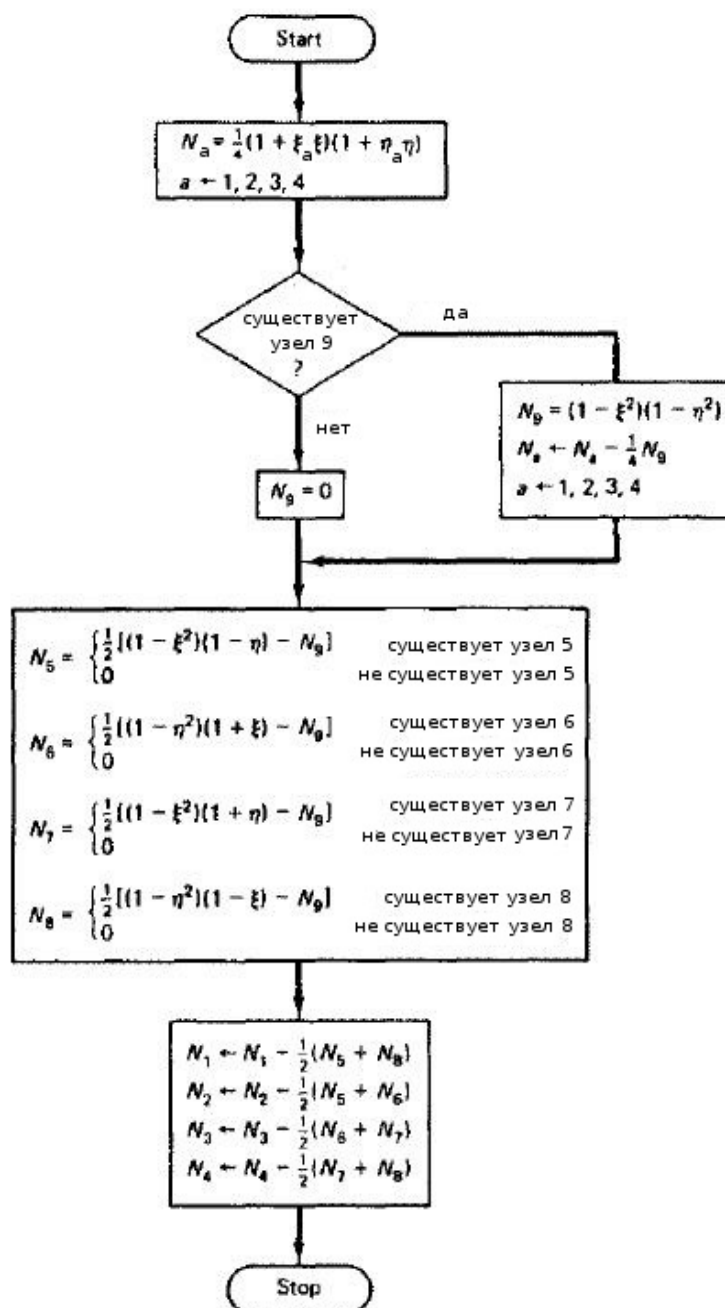
Функция N_9 обращается в 0 во всех узлах от 1 до 8. Однако при этом все функции N_1, \dots, N_8 снова необходимо изменить для того, чтобы они учитывали наличие нового узла. Это можно проделать следующим образом:

$$N_a \leftarrow \underbrace{N_a}_{\substack{\text{билинейные базисные} \\ \text{функции (3.65)}}} - \frac{1}{4}N_9, \quad a = 1, 2, 3, 4. \quad (3.79)$$

Для $a = 5, 6, 7, 8$ получим

$$N_a \leftarrow \begin{cases} \text{функции, определенные} \\ \text{в (3.66), (3.70)-(3.72)} \\ \underbrace{N_a} \\ 0, \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{2}N_9, & \text{узел } a \text{ существует} \\ & \text{узел } a \text{ не существует} \end{cases} \quad (3.80)$$

Алгоритм построения функций можно описать с помощью блок-схемы.



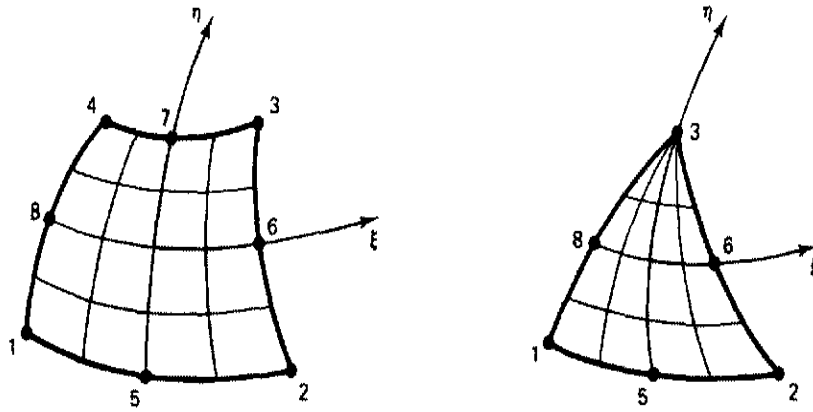
Необходимо следить за тем, чтобы элементы высшего порядка не были слишком сильно деформированы. Например, в случае восьмиузлового элемента всевнутренние углы должны быть меньше π , кроме того точки внутри ребер не должны слишком сильно отклоняться от центров соответствующих сторон

Задача 1

По блок-схеме, предложенной выше, восстановить базисные функции для восьмиузлового четырехугольного элемента.

Задача 2

Воспользовавшись результатами предыдущей задачи и техникой вырождения найти базисные функции для треугольного элемента

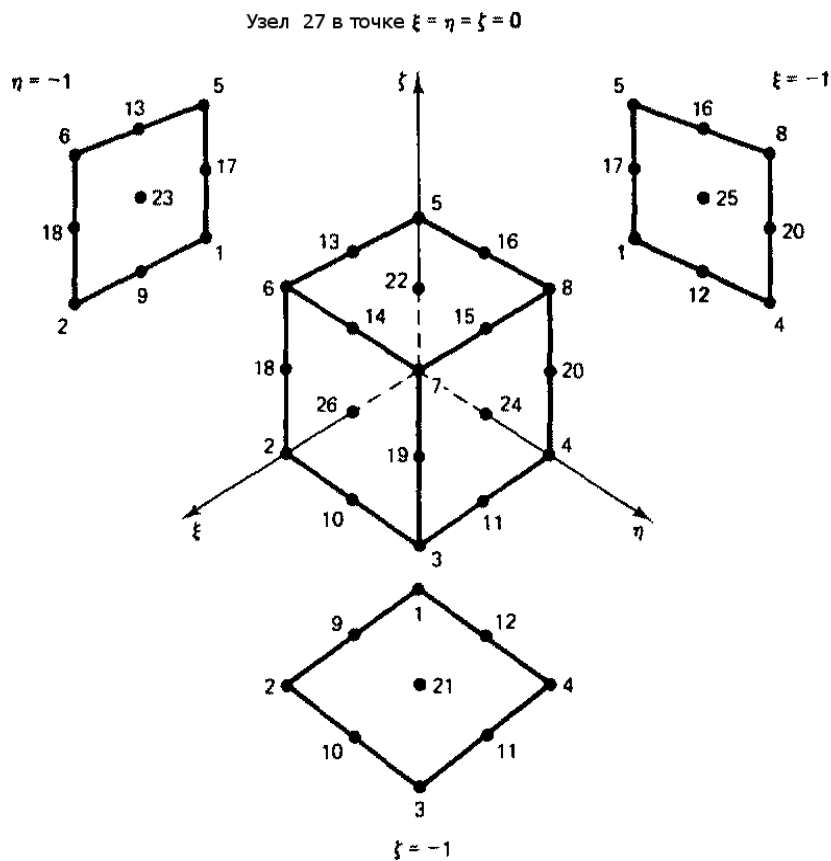


Задача 3

Обобщить блок-схему так, чтобы она работала также и для 9-ти узлового элемента вырожденного до треугольного.

Задача 4

Построить алгоритм, аналогичный предъявленному для 9-ти узлового элемента, для 27-ми узлового трех-мерного кубического элемента



Задача 5

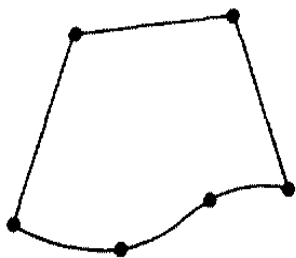
Перенести блок-схему из Задачи 4 на случай вырождения кубического элемента в клиновидный.

Задача 6

Построить схему решения для 16-ти узлового четырехугольного плоского элемента. 16-ти узовой элемент — стандартный бикубический элемент Лагранжа.

Задача 7

Найти базисные функции для 6-ти узлового элемента



Глава 4

Примеры программ

Бесплатная программа `freefem` (решение уравнений) вместе с программой `gmsh` (построение разбиений областей) помогает решать задачи методом конечных элементов.

4.1 Пример 1. Уравнение Лапласа

Пусть дана функция $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, найти такую $u \in H^1(\Omega)$, что

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{на } \Omega \\ u(x, y) = 0 & \text{на } \Gamma \\ (\nabla u, \vec{n}) = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases}$$

Пусть $f = \delta_x \delta_y$

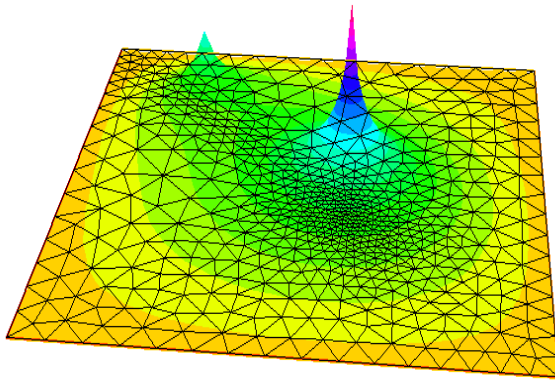
Программа:

```
real[int] xdelta = [0.25,0.6]; // координата deltax
real[int] ydelta = [0.25,0.6]; // координата deltay
real[int] cdelta=[1.,2.]; // коэффициенты deltai
mesh Th=square(10,10);
verbosity=0;
for(int iter=0;iter < 20;iter++)
{
  fespace Vh(Th,P1); // конечноэлементное разбиение области
на треугольники
  matrix D = interpolate(Vh,xdelta,ydelta); // матрица жест-
кости
  //в точке (xdelta[j],ydelta[i] )
```

```

// so  $D_i j = w^i((xdelta[j], ydelta[i])$ , где  $w^i$  — тестовые функ-
ции  $V_h$ .
Vh uh,vh; // неизвестная и тестовая функции
func g=0; // граничное условие
Vh b;
b[] = D*cdelta;
b[] = -b[]; problem laplace(uh,vh) = // определение задачи
int2d(Th)( dx(uh)*dx(vh) + dy(uh)*dy(vh) ) // билинейная
форма
+ b[] // вектор сил
+ on(1,2,3,4,uh=0) ; // краевое условие в векторной форме
laplace; // решение задачи
plot(uh); // график решения
cout << "max uh = <<< uh[].max << "nv = <<< Th.nv << endl;
plot(uh,wait=1,dim=3,fill=1);
Th=adaptmesh(Th,uh,nbv=100000,err= 0.01*1.2^iter);
}

```



4.2 Волновое уравнение

$$\begin{aligned}
 \partial_{tt}u - c^2 \Delta u &= 0 && \text{on } \Omega = (0, 1)^2, \quad t > 0 \\
 u(x, y, t = 0) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y) && \text{on } \Omega \\
 \partial_t u(x, y, 0) &= 0 && \text{on } \Omega \\
 u(x, y, t) &= 0 && \text{on } \partial\Omega
 \end{aligned}$$

```

Προγραμμα:
verbosity=0;
load "medit"
load "msh3"
real Dx=.02,Dy=.02;
mesh Th=square(floor(1./Dx),floor(1./Dy));
fespace Vh(Th,P1);
func g=0.;
real c=1.,dt=.01,Tf=4.;
Vh uh,vh,uh0=sin(pi*x)*sin(pi*y),uh1=uh0+dt*g;
macro Grad(u)[dx(u),dy(u)]//
problem      tambour(uh,vh)      =      int2d(Th)(uh*vh      +
Grad(uh))*Grad(vh)*(c*dt)^*.5 )
+ int2d(Th)(Grad(uh0))*Grad(vh)*(c*dt)^*.5 )
- int2d(Th)(2.*uh1*vh - uh0*vh)
+ on(1,2,3,4,uh=0);
int kk=0,k=0;
for (real t=0.;t<Tf;t+=dt) {
tambour;
uh0 = uh1;
uh1 = uh;
if ( !(kk % 20)) { plot(uh,cmm="t="+t,fill=true,value=true,wait=1,dim
mesh3 TK=movemesh23(Th,transfo=[x,y,uh/2.]);
medit("Solution TK);
savemesh(TK,"Ondes2D."+(100000+k)+".mesh");
{ ofstream ff("Ondes2D."+(100000+k)+".txt");
for (int i=0;i<Th.nt;i++){
for (int j=0; j <3; j++)
ff«Th[i][j].x « « Th[i][j].y« «uh[[Vh(i,j)]«endl;
ff«Th[i][0].x « « Th[i][0].y« «uh[[Vh(i,0)]«"\n";
}
}
k++;

```

$\}$
 $kk++;$
 $\}$

Литература

- [1] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method* (Prentice-Hall, New Jersey, 1987)
- [2] G.R. Liu and S.S. Quek, *The Finite Element Method. A practical course*, (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003).
- [3] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method. The basis*, (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000)
- [4] J. N. Reddy, *An Introduction to The Finite Element Method*, (McGraw-Hill, New York, 2005).